

# Hindernisse gegen die Glättung von Poincaré-Räumen

Clemens Schützdeller

Diplomarbeit, 1982

## Vorwort

Dieser Artikel ist eine L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-Abschrift meiner Diplomarbeit aus dem Jahre 1982. Zu dieser Zeit habe ich meine Diplomarbeit noch mit einer IBM-Kugelkopf-Schreibmaschine (damals war das HighTech!) getippt. Immer erst das Blatt vollgeschrieben mit dem *normalen* Text, dann zurückgekurbelt und den Kugelkopf mit den griechischen Buchstaben montiert, und dann die *Sonderzeichen* eingefügt. Tippfehler waren da schon sehr ärgerlich, denn das hieß: Seite wegwerfen und neuschreiben.

Ich habe mich bemüht, diese Diplomarbeit so originalgetreu wie möglich abzuschreiben. An manchen Stellen habe ich aber – der besseren Lesbarkeit halber – einige kleine Umformatierungen vorgenommen, ohne dabei inhaltlich an dem Text etwas zu verändern. In diesem Zuge habe ich auch einige Anpassungen an die mittlerweile geänderte deutsche Rechtschreibung vorgenommen.

Ferner waren alle Fußnoten und Randbemerkungen nicht Bestandteil der Original-Arbeit.

Clemens Schützdeller  
Mai 2016

# Contents

Einleitung	iii
1 Homotopie	1
2 CW-Räume	15
3 Faserungen und Faserbündel	28
4 Homotopietheoretische Klassifikation von Prinzipal-M-Quasifaserungen bzw. Prinzipal-G-Bündeln und Hindernistheorie	60
5 Poincaré-Räume	72
Literatur	82

## Einleitung

Die Arbeit beschäftigt sich mit der Frage, ob eine Glättung eines einfach zusammenhängenden,  $n$ -dimensionalen Poincaré-Raums  $P \simeq X \cup_f e^n$ ,  $n \geq 6$ , existiert oder nicht, d.h. ob eine differenzierbare Mannigfaltigkeit existiert, die vom gleichen Homotopietyp ist wie  $P$ .

Inspiriert wurde ich zu der Beschäftigung mit diesem Problem durch das Theorem I in der Arbeit [27] von R. Stöcker:

Let  $Y = B \cup_f e^n$ , with  $\dim B \geq n-2$  and  $f: S^{n-1} \rightarrow B$ , be a simply connected Poincaré duality space. Then, if  $k \gg n$ , there exists a spherical fibration  $\eta$  over  $B$  with fibres  $\simeq S^k$ , unique up to stable fibre homotopy equivalence, such that  $S_\eta(f) = 0$ , where  $S_\eta: \pi_{n-1}(B) \rightarrow \pi_{n+k}(\tilde{C}_\eta)$  is the twisted suspension. Furthermore,  $\eta$  is stably equivalent to  $\nu|_B$ .

Hiervon ausgehend wurde angenommen, dass ein  $O$ -Bündel über  $X$  existiert, welches stabil faserhomotopieäquivalent zu der auf  $X$  eingeschränkten Spivak-Faserung über  $X \cup_f e^n$  ist. Das Problem der Fortsetzung des Bündels über die  $n$ -Zelle, sodass Fortsetzung und Spivak-Faserung stabil faserhomotopieäquivalent sind, führte zu einem Hindernis und zu folgender Kernaussage meiner Arbeit:

Sei  $P$  ein einfach zusammenhängender Poincaré-Komplex der formalen Dimension  $n \geq 6$  und  $\nu: P \rightarrow B_H$  die klassifizierende Abbildung der zu  $P$  gehörigen Spivak-Faserung. Ferner existiere eine Abbildung  $\sigma: P^{n-1} \rightarrow B_O$ , sodass  $B_i \circ \sigma: P^{n-1} \rightarrow B_H$  und  $\nu|_{P^{n-1}}: P^{n-1} \rightarrow B_H$  homotop sind.

Dann existiert ein durch die Homologie von  $P$  vollständig bestimmtes Element  $o(P) \in \pi_{n-1}(PL/O)$  und eine durch die Homologie von  $P$  vollständig bestimmte Untergruppe  $U(P) \subset \pi_{n-1}(PL/O)$ , sodass folgende Aussagen äquivalent sind:

- (a)  $o(P) \in U(P)$
- (b) Es existiert eine Abbildung  $\tilde{\nu}: P \rightarrow B_O$ , sodass  $B_i \circ \tilde{\nu}: P \rightarrow B_H$  und  $\nu: P \rightarrow B_H$  homotop sind.

Leider wurde die Berechnung des Hindernisses derart kompliziert, dass bis auf folgenden Satz keine weiteren Aussagen oder Beispiele von mir gemacht werden können:

Seien  $P_1$  und  $P_2$  Poincaré-Räume wie im obigen Theorem und  $P_1 \# P_2$  ihre zusammenhängende Summe. Dann gilt:

$$\begin{aligned} o(P_1 \# P_2) &= o(P_1) + o(P_2) \\ U(P_1 \# P_2) &= U(P_1) \oplus U(P_2) \end{aligned}$$

Die Arbeit gliedert sich in fünf Kapitel. In den ersten beiden werden die wichtigsten Grundlagen der Homotopietheorie und der CW-Räume dargestellt.

Kapitel 3 enthält als wichtigste Ergebnisse die Bijektion zwischen der Menge der Faserhomotopieäquivalenzklassen von Faserungen über einem CW-Komplex  $B$  mit lokalkompaktem CW-Komplex  $F$  als Faser und der Menge der Strukturäquivalenzklassen von Prinzipal- $H(F)$ -Quasifaserungen über  $B$ , bzw. die Bijektion zwischen der Menge der Äquivalenzklassen von Faserbündeln über einem beliebigen Raum  $B$  mit lokalkompakter Faser  $F$  und Strukturgruppe  $G$  und der Menge der Äquivalenzklassen von Prinzipal- $G$ -Bündeln über  $B$ .

Im Kapitel 4 werden die zu jedem assoziativen topologischen Monoid  $M$  existierenden klassifizierenden Räume  $BM$  eingeführt und die homotopietheoretische Klassifikation von Prinzipal- $M$ -Quasifaserungen bzw. Prinzipal- $G$ -Bündeln mit Hilfe dieser Räume erläutert. Ferner wird ein Hindernis gegen die Fortsetzung von Schnitten über eine  $n$ -Zelle definiert und der Zusammenhang mit der Reduktion der Strukturgruppe gezeigt.

Schließlich werden im Kapitel 5 die Poincaré-Räume eingeführt und einige wichtige homologietheoretische Sätze zitiert. Mit Hilfe der in den vorausgehenden Abschnitten erzielten Ergebnisse, insbesondere des Hindernisses aus Kapitel 4 ergeben sich nun die oben schon genannten Aussagen.

Es sei noch darauf hingewiesen, dass die Ergebnisse der (Co-)Homologietheorie als bekannt vorausgesetzt werden. Sämtliche Ergebnisse dieser Arbeit habe ich selbständig durch ausschließliche Verwendung meiner Kenntnisse aus Vorlesungen, Seminaren und der hinten aufgeführten Literatur entwickelt.

Abschließend möchte ich noch auf die in einigen Punkten wesentliche Betreuung der Arbeit durch Herrn R. Stöcker hinweisen und ihm an dieser Stelle meinen Dank dafür bekunden.

# 1 Homotopie

Im Folgenden seien alle auftretenden Abbildungen und Paare von topologischen Räumen aus der Kategorie  $TOP_*^2$ , d.i. die Kategorie aller Paare  $(X, A)$ , in denen ein Basispunkt  $x_0 \in A \subset X$  ausgezeichnet ist, und aller basispunkterhaltenden Abbildungen  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ . Für das Paar  $(X, \{x_0\})$  werde kurz  $X$  und für  $(X \times Y, A \times Y)$  kurz  $(X, A) \times Y$  geschrieben.

**1.1 Definition.** Gegeben seien zwei Paare  $(X, A)$  und  $(Y, B)$  und ein Teilraum  $X_0 \subset X$ , der den Basispunkt  $x_0 \in A$  enthalte.

Eine Abbildungsschar  $h_t: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ ,  $t \in I$ , heißt *Homotopie relativ  $X_0$* , falls die Abbildung  $H: (X, A) \times I \rightarrow (Y, B)$ ,  $(x, t) \rightarrow h_t(x)$ ,  $\forall x \in X, t \in I$ , stetig ist und  $\forall t \in I$  gilt:  $h_t(x) = h_0(x) \forall x \in X_0$ .

Zwei Abbildungen  $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  heißen *homotop relativ  $X_0$* ,  $f \simeq g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  rel  $X_0$ , falls eine Homotopie  $h_t: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ ,  $t \in I$ , relativ  $X_0$  existiert mit  $h_0 = f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  und  $h_1 = g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ .

Falls man die Homotopie mit angeben will schreibt man auch  $h_t: f \simeq g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  rel  $X_0$ .

Falls  $X_0 = \{x_0\}$  ist spricht man einfach von einer Homotopie und lässt den Zusatz *relativ  $X_0$*  weg.

Es lässt sich nun leicht nachprüfen, dass die Homotopierelation in  $TOP_*^2$  eine Äquivalenzrelation ist. Somit ist folgende Definition möglich:

**1.2 Definition.** Sei eine Abbildung  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  und ein Teilraum  $X_0 \subset X$  gegeben, der den Basispunkt  $x_0 \in A$  enthalte. Dann heißt

$$[f]_{X_0} := \{g: (X, A) \rightarrow (Y, B) \mid g \simeq f: (X, A) \rightarrow (Y, B) \text{ rel } X_0\}$$

*Homotopieklasse* von  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  rel  $X_0$ .

Die Menge aller Homotopieklassen relativ  $X_0$  von Abbildungen zwischen  $(X, A)$  und  $(Y, B)$  wird mit  $[(X, A), (Y, B)]_{X_0} = \{[f]_{X_0} \mid f: (X, A) \rightarrow (Y, B)\}$  bezeichnet.

Falls  $X_0 = \{x_0\}$  schreibt man statt  $[f]_{X_0}$  bzw.  $[(X, A), (Y, B)]_{X_0}$  kurz  $[f]$  bzw.  $[(X, A), (Y, B)]$ .

**1.3 Lemma.** <sup>1</sup>

(a) Seien  $(X, A)$ ,  $(Y, B)$  und  $(Y', B')$  topologische Paare und  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  eine Abbildung wie in 1.2. Eine Abbildung  $g: (Y, B) \rightarrow (Y', B')$  induziert eine Funktion  $g_*: [(X, A), (Y, B)] \rightarrow [(X, A), (Y', B')]$  durch die Zuordnung  $g_*[f] := [g \circ f]$ .

---

<sup>1</sup>In der Original-Diplomarbeit waren (1.2) und (1.3) zu einem *Definition und Satz* zusammengefasst. Deshalb ist ab hier die Nummerierung um 1 verschoben!

- (b) Seien  $(X, A)$ ,  $(X', A')$  und  $(Y, B)$  topologische Paare und  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  eine Abbildung wie in 1.2. Eine Abbildung  $h: (X', A') \rightarrow (X, A)$  induziert eine Funktion  $h^*: [(X, A), (Y, B)] \rightarrow [(X', A'), (Y, B)]$  durch die Zuordnung  $h^*[f] := [f \circ h]$ .

Im folgenden Satz sind einige elementare Eigenschaften angegeben, die sofort aus (1.2) und (1.3) folgen. Die Beweise werden deshalb weggelassen.

#### 1.4 Satz.

- (a) Seien  $f \simeq g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  und  $f' \simeq g': (Y, B) \rightarrow (Z, C)$  gegeben. Dann gilt

$$f' \circ f \simeq g' \circ g: (X, A) \rightarrow (Z, C)$$

- (b) Sei  $g = id_Y: (Y, B) \rightarrow (Y, B)$ . Dann gilt für alle  $(X, A)$

$$g_* = id_{[(X, A), (Y, B)]}: [(X, A), (Y, B)] \rightarrow [(X, A), (Y, B)]$$

- (c) Sei  $h = id_X: (X, A) \rightarrow (X, A)$ . Dann gilt für alle  $(Y, B)$

$$h^* = id_{[(X, A), (Y, B)]}: [(X, A), (Y, B)] \rightarrow [(X, A), (Y, B)]$$

- (d) Seien  $g: (Y, B) \rightarrow (Y', B')$  und  $g': (Y', B') \rightarrow (Y'', B'')$  gegeben. Dann gilt für alle  $(X, A)$

$$(g' \circ g)_* = g'_* \circ g_*: [(X, A), (Y, B)] \rightarrow [(X, A), (Y'', B'')]$$

- (e) Seien  $h: (X', A') \rightarrow (X, A)$  und  $h': (X'', A'') \rightarrow (X', A')$  gegeben. Dann gilt für alle  $(Y, B)$

$$(h \circ h')^* = h'^* \circ h^*: [(X, A), (Y, B)] \rightarrow [(X'', A''), (Y, B)]$$

- (f) Seien  $g \simeq g': (Y, B) \rightarrow (Y', B')$  gegeben. Dann gilt für alle  $(X, A)$

$$g_* = g'_*: [(X, A), (Y, B)] \rightarrow [(X, A), (Y', B')]$$

- (g) Seien  $h \simeq h': (X', A') \rightarrow (X, A)$  gegeben. Dann gilt für alle  $(Y, B)$

$$h^* = h'^*: [(X, A), (Y, B)] \rightarrow [(X', A'), (Y, B)]$$

Durch die nächste Definition wird eine Äquivalenzrelation in  $TOP^2$  eingeführt, die es ( $TOP_*^2$ ) ermöglicht, verschiedene topologische Räume in Klassen zusammenzufassen.

#### 1.5 Definition.

- (a) Eine Abbildung  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  heißt *Homotopieäquivalenz*, falls eine Abbildung  $f^-: (Y, B) \rightarrow (X, A)$  existiert, sodass gilt:  $f^- \circ f \simeq id_X: (X, A) \rightarrow (X, A)$  und  $f \circ f^- \simeq id_Y: (Y, B) \rightarrow (Y, B)$ .  
 $f^-: (Y, B) \rightarrow (X, A)$  wird als das *Homotopieinverse* von  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  bezeichnet.

- (b) Zwei Paare  $(X, A)$  und  $(Y, B)$  heißen vom *gleichen Homotopietyp*, falls eine Homotopieäquivalenz  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  existiert.

**1.6 Satz.** Seien  $g: (Y, B) \rightarrow (Y', B')$  und  $h: (X', A') \rightarrow (X, A)$  Homotopieäquivalenzen. Dann sind die Funktionen  $g_*: [(X, A), (Y, B)] \rightarrow [(X, A), (Y', B')]$  und  $h^*: [(X, A), (Y, B)] \rightarrow [(X', A'), (Y, B)]$  bijektiv.

*Beweis.* Die Aussagen erhält man sofort, wenn man die Ergebnisse von (1.4) anwendet.  $\square$

### 1.7 Definition.

- (a) Eine Abbildung  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  heißt *nullhomotop*, falls sie zu der konstanten Abbildung  $c: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ ,  $x \rightarrow y_0 \forall x \in X$ , homotop ist.
- (b) Ein topologisches Paar  $(X, A)$  heißt *zusammenziehbar*, falls  $id_X: (X, A) \rightarrow (X, A)$  nullhomotop ist.

**1.8 Satz.** Ein topologisches Paar  $(X, A)$  ist genau dann zusammenziehbar, wenn  $(X, A)$  und  $\{*\}$  vom gleichen Homotopietyp sind.

*Beweis.*

"  $\Rightarrow$  ": Nach Voraussetzung existiert eine Homotopie  $h_t: id_X \simeq c: (X, A) \rightarrow (X, A)$ ,  $t \in I$ . Für die Abbildungen  $f: (X, A) \rightarrow \{*\}$ ,  $x \rightarrow *$ , und  $f^-: \{*\} \rightarrow (X, A)$ ,  $* \rightarrow x_0$ , gilt dann:  $f \circ f^- = id_{\{*\}}: \{*\} \rightarrow \{*\}$  und  $h_t: id_X \simeq f^- \circ f = c: (X, A) \rightarrow (X, A)$ . Also ist  $f: (X, A) \rightarrow \{*\}$  eine Homotopieäquivalenz.

"  $\Leftarrow$  ": Sei nun eine Homotopieäquivalenz  $f: (X, A) \rightarrow \{*\}$  mit Homotopieinversen  $f^-: \{*\} \rightarrow (X, A)$  gegeben. Dann gilt:  $id_X \simeq f^- \circ f: (X, A) \rightarrow (X, A)$  und wegen  $f^- \circ f(x) = x_0 \forall x \in X$  ist  $(X, A)$  zusammenziehbar.  $\square$

**1.9 Definition.** Seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume mit Basispunkten  $x_0 \in X$  bzw.  $y_0 \in Y$ .

- (a)  $X \vee Y := X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y$  heißt *1-Punkt-Vereinigung* oder *Wedge-Produkt* von  $X$  und  $Y$ .  $(x_0, y_0)$  sei der Basispunkt von  $X \vee Y$ .
- (b)  $X \wedge Y := X \times Y / X \vee Y$  heißt *Smash-Produkt* von  $X$  und  $Y$ . Die Punkte von  $X \wedge Y$  werden mit  $\langle x, y \rangle$  bezeichnet und  $\langle x_0, y_0 \rangle$  sei der Basispunkt von  $X \wedge Y$ .
- (c)  $CX := I \wedge X$  heißt *Kegel* über  $X$  und  $\langle 1, x_0 \rangle$  sei sein Basispunkt. Wegen  $\{\langle 0, x \rangle \mid x \in X\} \approx X$  wird  $X$  als Teilraum von  $CX$  aufgefasst.
- (d)  $SX := S^1 \wedge X$  heißt *Einhängung* oder *Suspension* von  $X$  und die Punkte von  $SX$  werden mit  $\langle t, x \rangle$ ,  $t \in I$  bezeichnet. Dazu wird die  $S^1$  als  $I/\{0, 1\}$  mit  $* = 0 = 1$  als Basispunkt aufgefasst.

**1.10 Satz.** Gegeben sei eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i)  $f: X \rightarrow Y$  ist nullhomotop.
- (ii) Es existiert eine Abbildung  $F: CX \rightarrow Y$  mit  $F|_X = f: X \rightarrow Y$ .



*Beweis.*

"(i)  $\Rightarrow$  (ii)": Nach Voraussetzung existiert eine Homotopie  $h_t: f \simeq c: X \rightarrow Y, t \in I$ .

Definiere eine Abbildung  $F: CX \rightarrow Y$  durch  $F\langle t, x \rangle := \begin{cases} h_{2t}(x), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ y_0, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$ .

Sie ist offensichtlich wohldefiniert und stetig. Ferner gilt  $F\langle 0, x \rangle = h_0(x) = f(x) \forall x \in X$ , d.h.  $F|X = f: X \rightarrow Y$ .

"(ii)  $\Rightarrow$  (i)": Gegeben sei eine Abbildung  $F: CX \rightarrow Y$  mit  $F|X = f: X \rightarrow Y$ . Definiere eine Abbildung  $H: X \times I \rightarrow Y$  durch  $H(x, t) := F\langle t, x \rangle$ . Sie ist stetig und es gilt:  $H(x, 0) = F\langle 0, x \rangle = f(x)$  und  $H(x, 1) = F\langle 1, x \rangle = y_0 \forall x \in X$ , da  $\langle 1, x \rangle$  der Basispunkt von  $CX$  ist. Also ist  $f: X \rightarrow Y$  nullhomotop.  $\square$

**1.11 Definition.** Sei  $(X, A)$  ein beliebiges topologisches Paar und  $i: A \rightarrow X$  die Inklusion.

- (a)  $A$  heißt *Retrakt* von  $X$ , falls eine Abbildung  $r: X \rightarrow A$  mit  $r \circ i = id_A: A \rightarrow A$  existiert.  $r: X \rightarrow A$  heißt dann *Retraktion* von  $X$  auf  $A$ .
- (b)  $A$  heißt *Deformationsretrakt* von  $X$ , falls eine Retraktion  $r: X \rightarrow A$  und eine Homotopie  $h_t: id_X \simeq i \circ r: X \rightarrow X$  existieren.
- (c)  $A$  heißt *strenger Deformationsretrakt* von  $X$ , falls eine Retraktion  $r: X \rightarrow A$  und eine Homotopie  $h_t: id_X \simeq i \circ r: X \rightarrow X$  rel  $A$  existieren.

**1.12 Satz.**

- (a)  $X$  ist Retrakt von  $CX \Leftrightarrow X$  ist zusammenziehbar.
- (b)  $A$  ist Deformationsretrakt von  $X \Rightarrow i: A \rightarrow X$  ist eine Homotopieäquivalenz.
- (c)  $D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times I$  ist strenger Deformationsretrakt von  $D^n \times I$ .

*Beweis.*

(a)"  $\Rightarrow$  ": Sei  $r: CX \rightarrow X$  eine Retraktion. Für die Homotopie  $h_t: X \rightarrow X$ ,  $h_t(x) := r\langle t, x \rangle$  gilt dann:  $h_0(x) = r\langle 0, x \rangle = x$  und  $h_1(x) = r\langle 1, x \rangle = x_0 \forall x \in X$ . Also gilt  $h_t: id_X \simeq c: X \rightarrow X$ , d.h.  $X$  ist zusammenziehbar.

(a)"  $\Leftarrow$  ": Nach Voraussetzung existiert eine Homotopie  $h_t: id_X \simeq c: X \rightarrow X$ . Definiere nun eine Abbildung  $r: CX \rightarrow X$  durch  $r\langle t, x \rangle := h_t(x)$ . Sie ist offensichtlich wohldefiniert und stetig und es gilt:  $r\langle 0, x \rangle = h_0(x) = x \forall x \in X$ . Also ist  $r: CX \rightarrow X$  eine Retraktion.

(b) Für die nach Voraussetzung existierende Retraktion  $r: X \rightarrow A$  gilt  $r \circ i = id_A: A \rightarrow A$  und  $i \circ r \simeq id_X: X \rightarrow X$ . Also ist  $i: A \rightarrow X$  eine Homotopieäquivalenz.

(c) Da die Definition der gesuchten Homotopie technisch recht kompliziert ist, sei hier nur die Beweisidee skizziert:

Projiziere die Punkte von  $D^n \times I$  nach  $D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times I$  mit in dem Punkt  $(0, \dots, 0, 2)$  beginnenden Strahlen.

Dadurch wird eine Homotopie  $h_t: D^n \times I \rightarrow D^n \times I$  rel  $D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times I$  definiert. Mit  $r: D^n \times I \rightarrow D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times I$ ,  $r(x) := h_1(x)$  ist die Aussage dann bewiesen.  $\square$

Es werden nun die Begriffe der H-Gruppe und der H-Cogruppe eingeführt, die dazu dienen, in der Menge  $[(X, A), (Y, B)]$  eine Gruppenstruktur einzuführen. Dies ist möglich, wenn  $(X, A)$  eine H-Cogruppe oder  $(Y, B)$  eine H-Gruppe ist. Außerdem werden die Begriffe topologischer Monoid und topologische Gruppe eingeführt, die bei der Klassifikation von Faserungen bzw. Faserbündeln von Bedeutung sind.

**1.13 Definition.** Es sei ein topologischer Raum  $M$  mit Basispunkt  $1_M$  und eine Abbildung  $\mu: M \times M \rightarrow M$  gegeben.

- (a)  $(M, \mu)$  heißt topologischer *Monoid*, falls folgende Diagramme bis auf Homotopie kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{(c, id_M)} & M \times M \\ & \searrow id_M & \downarrow \mu \\ & & M \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{(id_M, c)} & M \times M \\ & \searrow id_M & \downarrow \mu \\ & & M \end{array}$$

$\mu: M \times M \rightarrow M$  heißt *Multiplikationsabbildung*.

- (b1) Ein topologischer Monoid  $(M, \mu)$  heißt *homotopie-assoziativ*, falls folgendes Diagramm bis auf Homotopie kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} M \times M \times M & \xrightarrow{\mu \times id_M} & M \times M \\ id_M \times \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\ M \times M & \xrightarrow{\mu} & M \end{array}$$

- (b2) Ein topologischer Monoid heißt *assoziativ*, falls das Diagramm in (b1) nicht nur bis auf Homotopie, sondern echt kommutiert.

- (c1) Ein homotopie-assoziativer Monoid  $(M, \mu)$  heißt *H-Gruppe*, falls eine Abbildung  $\iota: M \rightarrow M$  existiert, sodass folgende Diagramme bis auf Homotopie kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{(\iota, id_M)} & M \times M \\ & \searrow id_M & \downarrow \mu \\ & & M \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{(id_M, \iota)} & M \times M \\ & \searrow id_M & \downarrow \mu \\ & & M \end{array}$$

$\iota: M \rightarrow M$  heißt *Inversenabbildung*.

- (c2) Eine H-Gruppe  $(M, \mu)$  heißt *topologische Gruppe*, falls die Diagramme in (a), (b1) und (c1) nicht nur bis auf Homotopie, sondern echt kommutieren.

- (d) Sei  $(M, M')$  ein topologisches Paar und  $(M, \mu)$  eine H-Gruppe.  $((M, M'), \mu)$  heißt H-Gruppe, falls  $\mu(m, \bar{m})$  und  $\iota(m) \forall m, \bar{m} \in M'$  in  $M'$  liegen.

### 1.14 Beispiel.

(a) Sei  $X$  ein beliebiger topologischer Raum. Dann heißt

$$\Omega X := \{\omega: (I, \dot{I}) \rightarrow (X, x_0) \mid \omega: (I, \dot{I}) \rightarrow (X, x_0) \text{ ist stetig}\}$$

versehen mit der kompakt-offenen Topologie *Schleifenraum über  $X$* .

Definiere Abbildungen  $\mu: \Omega X \times \Omega X \rightarrow \Omega X$  durch

$$\mu(\omega, \omega')(t) := \begin{cases} \omega(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \omega'(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

und  $\iota: \Omega X \rightarrow \Omega X$  durch  $\iota(\omega)(t) := \omega(1 - t)$ .

Dann ist  $(\Omega(X, A), \mu) := ((\Omega X, \Omega A), \mu) \forall A \subset X$  eine H-Gruppe mit Inversenabbildung  $\iota: \Omega X \rightarrow \Omega X$ .

(b) Sei  $X$  ein beliebiger topologischer Raum und

$$H(X) := \{f: X \rightarrow X \mid f: X \rightarrow X \text{ ist eine Homotopieäquivalenz}\}$$

versehen mit der kompakt-offenen Topologie.

Dann ist  $(H(X), \mu)$  mit  $\mu: H(X) \times H(X) \rightarrow H(X)$ ,  $(f_1, f_2) \rightarrow f_1 \circ f_2$ , eine assoziative H-Gruppe.  $H(S^n)$  werde kurz mit  $H_n$  bezeichnet.

(c) Sei  $X$  ein beliebiger topologischer Raum und

$$Top(X) := \{f: X \rightarrow X \mid f: X \rightarrow X \text{ ist ein Homöomorphismus}\}$$

versehen mit der kompakt-offenen Topologie.

Dann ist  $(Top(X), \mu)$  mit  $\mu: Top(X) \times Top(X) \rightarrow Top(X)$ ,  $(f_1, f_2) \rightarrow f_1 \circ f_2$  eine topologische Gruppe.

(d) Sei  $X$  ein beliebiger Polyeder. Dann sei  $PL(X)$  die geometrische Realisation der semisimplizialen Gruppe, deren  $k$ -Simplexe diejenigen PL-Homöomorphismen

$f: \Delta^k \times X \rightarrow \Delta^k \times X$  sind, für die  $pr_1 \circ f = pr_1: \Delta^k \times X \rightarrow \Delta^k$  und  $f|_{\Delta^k \times \{x_0\}} = id_{\Delta^k \times \{x_0\}}: \Delta^k \times \{x_0\} \rightarrow \Delta^k \times \{x_0\}$  gilt.  $PL(S^n)$  werde kurz mit  $PL_n$  bezeichnet.

(e)  $O_n := \{f: S^n \rightarrow S^n \mid f: S^n \text{ ist orthogonal}\}$  versehen mit der kompakt-offenen Topologie ist eine topologische Gruppe durch  $\mu: O^n \times O^n$ ,  $(f_1, f_2) \rightarrow f_1 \circ f_2$ .

Zu der Definition von  $PL(X)$  in 1.14(d) möchte ich noch einige Bemerkungen machen:

- (1) Da ich auf die Theorie der *semisimplizialen Komplexe* bzw. *semisimplizialen Gruppen* nicht näher eingehe, verweise ich auf [10], [11], [12], [13], [17] und [18].
- (2) In [14] wird erwähnt, dass die zu  $Top(X)$  analoge Definition von  $PL(X)$  mit der kompakt-offenen Topologie für die Klassifikation der PL-Bündel nicht geeignet ist. Eine Begründung ist nicht angegeben und konnte von mir auch ansonsten nicht gefunden werden.
- (3) Man kann  $H_n$  und  $O_n$  auch analog zu  $PL_n$  definieren, siehe z.B. [13]. Dann sieht man sehr leicht, dass Inklusionen  $O_n \rightarrow PL_n \rightarrow H_n$  existieren und dass  $(CAT_n, id_{S^n})$  ein NDR ist,  $CAT_n \in \{O_n, PL_n, H_n\}$ . Dies ist ein wesentliches Ergebnis für Kapitel 4, das in der mir bekannten Literatur nirgendwo explizit gezeigt wird.

**1.15 Satz.**

- (a) Sei  $(M, \mu)$  eine  $H$ -Gruppe. Dann ist  $\mu(m, \cdot): M \rightarrow M, m' \rightarrow \mu(m, m') \forall m \in M$ , eine Homotopieäquivalenz.
- (b) Sei  $(M, \mu)$  eine topologische Gruppe. Dann ist  $\mu(m, \cdot): M \rightarrow M, m' \rightarrow \mu(m, m') \forall m \in M$ , ein Homöomorphismus.

*Beweis.* Seien Abbildungen  $\rho_m: M \rightarrow M$  und  $c_m: M \rightarrow M$  durch  $\rho_m(m') := \mu(\iota(m), m')$  bzw.  $c_m(m') := m$  definiert. Dann gilt:

(a) :

$$\begin{aligned}
 \mu(m, \cdot) \circ \rho_m &= \mu \circ (id_M \times \mu) \circ ((id_M, \iota) \times id_M) \circ (c_M, id_M) \\
 &\simeq \mu \circ (\mu \times id_M) \circ ((id_M, \iota) \times id_M) \circ (c_M, id_M) \\
 &= \mu \circ ((\mu \circ (id_M, \iota)) \times id_M) \circ (c_M, id_M) \\
 &\simeq \mu \circ (c \times id_M) \circ (c_M, id_M) \\
 &= \mu \circ (c \circ c_M, id_M) \\
 &= \mu \circ (c, id_M) \\
 &\simeq id_M: M \rightarrow M \\
 \rho_m \circ \mu(m, \cdot) &= \mu \circ (id_M \times \mu) \circ ((\iota, id_M) \times id_M) \circ (c_M, id_M) \\
 &\simeq \mu \circ (\mu \times id_M) \circ ((\iota, id_M) \times id_M) \circ (c_M, id_M) \\
 &= \mu \circ ((\mu \circ (\iota, id_M)) \times id_M) \circ (c_M, id_M) \\
 &\simeq \mu \circ (c \times id_M) \circ (c_M, id_M) \\
 &= \mu \circ (c \circ c_M, id_M) \\
 &= \mu \circ (c, id_M) \\
 &\simeq id_M: M \rightarrow M
 \end{aligned}$$

(b) :

$$\begin{aligned}
 \mu(m, \cdot) \circ \rho_m(m') &= \mu(m, \cdot)(\mu(\iota(m), m')) \\
 &= \mu(m, \mu(\iota(m), m')) \\
 &= \mu(\mu(m, \iota(m)), m') \\
 &= \mu(1_M, m') \\
 &= m' \\
 \rho_m \circ \mu(m, \cdot)(m') &= \rho_m(\mu(m, m')) \\
 &= \mu(\iota(m), \mu(m, m')) \\
 &= \mu(\mu(\iota(m), m), m') \\
 &= \mu(1_M, m') \\
 &= m'
 \end{aligned}$$

□

**1.16 Satz.** Sei  $((M, M'), \mu)$  eine  $H$ -Gruppe. Dann ist für jedes Paar  $(X, A)$  die Menge  $[(X, A), (M, M')]$  eine Gruppe und die durch  $h: (X', A') \rightarrow (X, A)$  induzierte Abbildung  $h^*: [(X, A), (M, M')] \rightarrow [(X', A'), (M, M')]$  ein Homomorphismus.

*Beweis.* Man prüft leicht nach, dass die Zuordnung  $([f], [f']) \rightarrow [\mu \circ (f, f')] \forall [f], [f'] \in [(X, A), (M, M')]$  wohldefiniert ist und eine Gruppenoperation ergibt. Die zweite Aussage des Satzes ergibt sich wegen  $\mu \circ (f, f') \circ h = \mu \circ (f \circ h, f' \circ h): (X, A) \rightarrow (M, M')$ . □

**1.17 Definition.**

- (a) Sei ein topologischer Raum  $Q$  und ein Abbildung  $\phi: Q \rightarrow Q \vee Q$  gegeben.  $(Q, \phi)$  heißt *H-Cogruppe*, falls eine Abbildung  $\psi: Q \rightarrow Q$  existiert, sodass gilt:

$$(id_Q, c) \circ \phi \simeq id_Q: Q \rightarrow Q$$

$$(c, id_Q) \circ \phi \simeq id_Q: Q \rightarrow Q$$

$$(id_Q \vee \phi) \circ \phi \simeq (\phi \vee id_Q) \circ \phi: Q \rightarrow Q \vee Q \vee Q$$

$$(id_Q, \psi) \circ \phi \simeq c: Q \rightarrow Q$$

$$(\psi, id_Q) \circ \phi \simeq c: Q \rightarrow Q$$

- (b) Sei  $(Q, Q')$  ein topologisches Paar und  $(Q, \phi)$  eine H-Cogruppe.  $((Q, Q'), \phi)$  heißt *H-Cogruppe*, falls  $\phi(q) \in Q' \vee Q'$  und  $\psi(q) \in Q' \forall q \in Q'$  gilt.

**1.18 Beispiel.** Sei  $(X, A)$  ein beliebiges topologisches Paar. Dann ist

$$(S(X, A), \phi) := ((SX, SA), \phi) \text{ mit } \phi: SX \rightarrow SX \vee SX, \langle t, x \rangle \rightarrow \begin{cases} (\langle 2t, x \rangle *), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (*, \langle 2t - 1, x \rangle), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

eine H-Cogruppe. Die Abbildung  $\psi: SX \rightarrow SX$  wird dazu durch  $\langle t, x \rangle \rightarrow \langle 1 - t, x \rangle$  definiert.

**1.19 Satz.** Sei  $((Q, Q'), \phi)$  eine H-Cogruppe. Dann ist für jedes topologische Paar  $(X, A)$  die Menge  $[(Q, Q'), (X, A)]$  eine Gruppe und die durch  $g: (X, A) \rightarrow (X', A')$  induzierte Abbildung  $g_*: [(Q, Q'), (X, A)] \rightarrow [(Q, Q'), (X', A')]$  ein Homomorphismus.

*Beweis.* Die Zuordnung  $([f], [f']) \rightarrow [(f, f') \circ \phi]$  ist wohldefiniert für alle  $([f], [f']) \in [(Q, Q'), (X, A)]$  und ergibt eine Gruppenoperation.

Die zweite Aussage folgt wegen  $g \circ (f, f') \circ \phi = (g \circ f, g \circ f') \circ \phi: (Q, Q') \rightarrow (X', A')$   $\square$

**1.20 Definition.**

- (a) Seien  $((M, M'_1), \mu_1)$  und  $((M, M'_2), \mu_2)$  topologische Monoide. Eine Abbildung  $f: (M, M'_1) \rightarrow (M, M'_2)$  heißt *equivariant*, falls  $\mu_2 \circ (f \times f) \simeq f \circ \mu_1: M_1 \times M_1 \rightarrow M_2$  gilt.

- (b) Seien  $((Q_1, Q'_1), \phi_1)$  und  $((Q_2, Q'_2), \phi_2)$  H-Cogruppen. Eine Abbildung  $g: ((Q_1, Q'_1), \phi_1) \rightarrow ((Q_2, Q'_2), \phi_2)$  heißt *equivariant*, falls  $\phi_2 \circ g \simeq (g \vee g) \circ \phi_1: Q_1 \rightarrow Q_2 \vee Q_2$  gilt.

**1.21 Satz.** Sei  $(M, \mu)$  ein topologischer Monoid (eine H-Gruppe) und  $f: M \rightarrow X$  eine Homotopieäquivalenz. Dann ist auch  $X$  ein topologischer Monoid (eine H-Gruppe), und zwar solcher Art, dass  $f: M \rightarrow X$  equivariant ist.

Die entsprechende Aussage gilt auch für H-Cogruppen.

*Beweis.* Sei  $g: X \rightarrow M$  das Homotopieinverse von  $f: M \rightarrow X$  und  $\chi := f \circ \mu \circ (g \circ g): X \times X \rightarrow X$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \chi \circ (id_X, c_X) &\simeq f \circ \mu \circ (id_M, c_M) \circ g \\ &\simeq f \circ g \\ &\simeq id_X: X \rightarrow X \end{aligned}$$

und analog  $\chi \circ (c_X, id_X) \simeq id_X: X \rightarrow X$ . Also ist  $(X, \chi)$  ein topologischer Monoid.

Wegen  $f \circ \mu \simeq \chi \circ (f \times f): M \times M \rightarrow X$  ist  $f: M \rightarrow X$  equivariant.

Ferner sieht man leicht, dass  $(X, \chi)$  homotopie-assoziativ ist, falls  $(M, \mu)$  es ist; und falls  $(M, \mu)$  durch  $\iota: M \rightarrow M$  zu einer H-Gruppe wird, wird  $(X, \chi)$  durch  $f \circ \iota \circ g: X \rightarrow X$  zu einer H-Gruppe.  $\square$

**1.22 Satz.** *Sei  $f: M \rightarrow M'$  eine Homotopieäquivalenz zwischen topologischen Monoiden (H-Cogruppen). Falls  $f: M \rightarrow M'$  equivariant ist, so ist auch das Homotopieinverse  $f^-: M' \rightarrow M$  equivariant.*

*Beweis.* Der Beweis wird nur für topologische Monoide geführt; der für H-Cogruppen verläuft analog.

Sei  $\mu: M \times M \rightarrow M$  die Multiplikationsabbildung von  $M$  und  $\mu': M' \times M' \rightarrow M'$  die von  $M'$ . Dann folgt aus  $\mu' \circ (f \times f) \simeq f \circ \mu: M \times M \rightarrow M'$ ,

$$\text{dass } \mu' \simeq f \circ \mu \circ (f^- \times f^-): M^- \times M^- \rightarrow M^-,$$

$$\text{und somit } \mu \circ (f^- \times f^-) \simeq f^- \circ \mu': M' \times M' \rightarrow M$$

$\square$

**1.23 Satz.**

(a) *Seien  $((M_1, M'_1), \mu_1)$  und  $((M_2, M'_2), \mu_2)$  H-Gruppen und  $f: (M_1, M'_1) \rightarrow (M_2, M'_2)$  eine equivariante Abbildung. Dann ist  $f_*: [(X, A), (M_1, M'_1)] \rightarrow [(X, A), (M_2, M'_2)] \forall (X, A)$  ein Homomorphismus.*

(b) *Seien  $((Q_1, Q'_1), \phi_1)$  und  $((Q_2, Q'_2), \phi_2)$  H-Cogruppen und  $g: (Q_1, Q'_1) \rightarrow (Q_2, Q'_2)$  eine equivariante Abbildung. Dann ist  $g^*: [(Q_2, Q'_2), (X, A)] \rightarrow [(Q_1, Q'_1), (X, A)] \forall (X, A)$  ein Homomorphismus.*

*Beweis.* Die Aussagen folgen sofort aus der Definition equivarianter Abbildungen (1.20).  $\square$

**1.24 Satz.** *Seien  $(X, A)$  und  $(Y, B)$  beliebige topologische Paare. Dann existiert eine Bijektion zwischen  $[S(X, A), (Y, B)]$  und  $[(X, A), \Omega(Y, B)]$ .*

*Beweis.*  $C_*((U, V), (U', V'))$  sei die Menge aller basispunkterhaltenden stetigen Abbildungen von  $(U, V)$  nach  $(U', V')$ . Definiere nun

$$\phi: C_*((X, A), \Omega(Y, B)) \rightarrow C_*(S(X, A), (Y, B)), \phi(g\langle t, x \rangle) := g(x)(t)$$

$$\psi: C_*(S(X, A), (Y, B)) \rightarrow C_*((X, A), \Omega(Y, B)), \psi(f)(x)(t) := f\langle t, x \rangle$$

Man prüft leicht nach, dass diese Abbildungen bijektiv und zueinander invers sind.

Da in  $TOP_*^2$  eine Homotopie  $G: X \times I \rightarrow Y$  den Teilraum  $\{x_0\} \times I$  nach  $\{y_0\}$  abbilden muss, definiert sie eine Abbildung  $F: X \times I / \{x_0\} \times I \rightarrow Y$ . Da  $S(X \times I / \{x_0\} \times I)$  durch den Homöomorphismus  $\langle t', (x, t) \rangle \longleftrightarrow (\langle t', x \rangle, t)$  mit  $SX \times I / \{x_0\} \times I$  identifiziert werden kann, existiert eine Bijektion zwischen Homotopien  $F: X \times I / \{x_0\} \times I \rightarrow \Omega Y$  und Homotopien  $F': SX \times I / \{x_0\} \times I \rightarrow Y$ , womit die Aussage des Satzes folgt.  $\square$

**1.25 Satz.** Sei  $((M, M'), \mu)$  eine H-Gruppe und  $((Q, Q'), \phi)$  eine H-Cogruppe. Dann stimmt die durch  $\mu: M \times M \rightarrow M$  in  $[(Q, Q'), (M, M')]$  induzierte Gruppenstruktur mit der durch  $\phi: Q \rightarrow Q \vee Q$  induzierten überein. Ferner ist  $[(Q, Q'), (M, M')]$  eine abelsche Gruppe.

*Beweis.* Bezeichne die durch  $\mu: M \times M \rightarrow M$  induzierte Gruppenoperation mit

$$\bar{\mu}: [(Q, Q'), (M, M')] \times [(Q, Q'), (M, M')] \rightarrow [(Q, Q'), (M, M')]$$

und die durch  $\phi: Q \vee Q$  induzierte mit

$$\bar{\phi}: [(Q, Q'), (M, M')] \times [(Q, Q'), (M, M')] \rightarrow [(Q, Q'), (M, M')]$$

Dann gilt für beliebige  $[f], [g] \in [(Q, Q'), (M, M')]$ :

$$\begin{aligned} \bar{\mu}([f], [g]) &= [\mu \circ (f, g)] \\ &= [\mu \circ ((f, c) \circ \phi, (c, g) \circ \phi)] \\ &= [\mu \circ ((f, c), (c, g)) \circ \phi] \\ &= [(f, g) \circ \phi] \\ &= \bar{\phi}([f], [g]) \end{aligned}$$

Also stimmen die beiden Gruppenoperationen überein. Ferner gilt:

$$\begin{aligned} \bar{\mu}([g], [f]) &= [\mu \circ (g, f)] \\ &= [\mu \circ ((c, g) \circ \phi, (f, c) \circ \phi)] \\ &= [\mu \circ (c, g), (f, c)] \circ \phi \\ &= [(\mu \circ (c, f), \mu \circ (g, c)) \circ \phi] \\ &= [(f, g) \circ \phi] \\ &= \bar{\phi}([f], [g]) \\ &= \bar{\mu}([f], [g]) \end{aligned}$$

Also ist die Gruppenoperation abelsch. □

**1.26 Korollar.** Sei  $X$  ein beliebiger topologischer Raum.

Dann ist  $\pi_n(X, x_0) := [(S^n, \{*\}), (X, \{x_0\})]$  für alle  $n \geq 1$  eine Gruppe und für alle  $n \geq 2$  abelsch.

$\pi_n(X, x_0)$  heißt  $n$ -te Homotopiegruppe von  $(X, x_0)$ .

*Beweis.*  $S^n = SS^{n-1}$ , d.h.  $S^n$  ist für alle  $n \geq 1$  eine H-Cogruppe und für alle  $n \geq 2$  abelsch. Somit folgen aus (1.19), (1.24) und (1.25) die Aussagen des Korollars. □

**1.27 Korollar.** Sei  $(X, A)$  ein beliebiges topologisches Paar.

Dann ist  $\pi_n(X, A, x_0) := [(D^n, S^{n-1}, \{*\}), (X, A, \{x_0\})]$  für alle  $n \geq 2$  eine Gruppe und für alle  $n \geq 3$  abelsch.

$\pi_n(X, A, x_0)$  heißt  $n$ -te relative Homotopiegruppe von  $(X, A, x_0)$ .

*Beweis.*  $(D^n, S^{n-1} = S(D^{n-1}, S^{n-2}))$ , d.h.  $(D^n, S^{n-1})$  ist für alle  $n \geq 2$  eine H-Cogruppe und für alle  $n \geq 2$  abelsch. Somit folgen aus (1.19), (1.24) und (1.25) die Aussagen des Korollars. □

**1.28 Satz.**  $\pi_n(X, \{x_0\}, x_0) = \pi_n(X, x_0)$  für jeden topologischen Raum  $X$ .

*Beweis.* Eine Abbildung  $f: (D^n, S^{n-1}, \{*\}) \rightarrow (X, \{x_0\}, \{x_0\})$  kann man auch als Abbildung  $f': (D^n/S^{n-1} = S^n, \{*\}) \rightarrow (X, \{x_0\})$  betrachten und umgekehrt.  $\square$

**1.29 Satz.**

- (a) Sei  $X$  ein wegzusammenhängender topologischer Raum.  
Dann gilt für alle  $x_0, x_1 \in X: \pi_n(X, x_0) \cong \pi_n(X, x_1) \forall n \geq 1$ .
- (b) Sei  $(X, A)$  ein topologisches Paar und  $A$  wegzusammenhängend.  
Dann gilt für alle  $x_0, x_1 \in A: \pi_n(X, A, x_0) \cong \pi_n(X, A, x_1) \forall n \geq 2$ .

*Beweis.* Da der Beweis rein technisch ist, wird er hier nicht ausgeführt. In [28], (6.1.16) & (6.1.17), findet man ihn sehr detailliert. Die unterschiedlichen Definitionen von  $\pi_n(X, A, x_0)$  bzw.  $\pi_n(X, x_0)$  stimmen wegen (1.21) und (1.22) überein.  $\square$

**1.30 Satz.** Eine Abbildung  $f: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, A)$  repräsentiert genau dann das Nullelement von  $\pi_n(X, A, x_0)$ , wenn eine Abbildung  $g: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, A)$  mit  $\text{Bild}(g) \subset A$  und eine Homotopie  $h_t: f \simeq g: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, A) \text{ rel } S^{n-1}$  existieren.

*Beweis.* Sei  $[f] = 0 \in \pi_n((X, A, x_0))$ . Dann existiert eine Homotopie  $h_t: f \simeq c: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, A)$ . Definiere nun eine Homotopie  $h'_t: f \simeq c: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, A) \text{ rel } S^{n-1}$  durch

$$h'_t(z) := \begin{cases} h_t\left(\frac{z}{1-\frac{t}{2}}\right), & 0 \leq \|z\| \leq 1 - \frac{t}{2} \\ h_{2-2\|z\|}\left(\frac{z}{\|z\|}\right), & 1 - \frac{t}{2} \leq \|z\| \leq 1 \end{cases}$$

Dann ist  $h'_1(z) \in A \forall z \in D^n$ . Definiere die Abbildung  $g: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, A)$  durch  $g(z) := h'_1(z), z \in D^n$ .

Sei nun umgekehrt  $f: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, A)$  homotop relativ  $S^{n-1}$  zu einer Abbildung  $g: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, A)$  mit  $\text{Bild}(g) \subset A$ .

Die Homotopie  $h_t: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, A), h_t(z) := g((1-t)z + t \cdot *)$ , ergibt  $[g] = 0 \in \pi_n(X, A, x_0)$  und somit ist  $[f] = 0 \in \pi_n(X, A, x_0)$ .  $\square$

**1.31 Satz.** Gegeben sei ein beliebiges topologisches Paar  $(X, A)$ . Dann ist mit  $\partial: \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_{n-1}(X, A), [f] \rightarrow [f|S^{n-1}]$ , folgende Sequenz exakt:

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \pi_{n+1}(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \dots \\ \dots \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \end{aligned}$$

Sie heißt exakte Homotopiesequenz des Paares  $(X, A)$ .

*Beweis.*

(1)  $\text{Bild}(j_*) = \text{Kern}(\partial)$

- (i) Sei eine Abbildung  $f: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, \{x_0\})$  gegeben, d.h.  $f|S^{n-1} = c: S^{n-1} \rightarrow \{x_0\}$ . Dann gilt auch  $j \circ f|S^{n-1} = c: S^{n-1} \rightarrow A$ . Also gilt:

$$\begin{aligned} \partial[j \circ f] &= [j \circ f|S^{n-1}] \\ &= [c] \\ &= 0 \in \pi_{n-1}(A, x_0), \end{aligned}$$

d.h.  $\text{Bild}(j_*) = \text{Kern}(\partial)$ .



- (ii) Sei  $\partial[f] = 0 \in \pi_{n-1}(A, x_0)$  für eine Abbildung  $f: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, A)$ , d.h.  $f|_{S^{n-1}}: S^{n-1} \rightarrow A$  ist nullhomotop.

Sei  $h_t: S^{n-1} \rightarrow A$  solch eine Homotopie. Definiere nun eine Abbildung  $f': CS^{n-1} \rightarrow X$  durch

$$f'\langle t, u \rangle := \begin{cases} h_{2t}(u), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f\langle 2t-1, u \rangle, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Wegen  $f'\langle 0, u \rangle = h_0(u) = x_0 \forall u \in S^{n-1}$  kann  $f': D^n \rightarrow X$  als eine Abbildung  $f'': (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, A)$  aufgefasst werden. Es gilt aber  $h'_\tau: j \circ f'' \simeq f: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, A)$  mit

$$h'_\tau\langle t, u \rangle := \begin{cases} h_{2t(1-\tau)+\tau}(u), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f\langle 2t-1, u \rangle, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

d.h.  $\text{Kern}(\partial) \subset \text{Bild}(j_*)$ .

- (2)  $\text{Bild}(\partial) = \text{Kern}(i_*)$

- (i) Sei eine Abbildung  $f: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, A)$  gegeben. Dann ist

$$i_* \circ \partial[f] = [i \circ f|_{S^{n-1}}] = 0 \in \pi_{n-1}(X, x_0)$$

nach (1.10). Also gilt  $\text{Bild}(\partial) \subset \text{Kern}(i_*)$

- (ii) Sei nun eine Abbildung  $f: S^{n-1} \rightarrow A$  gegeben, sodass  $i \circ f: S^{n-1} \rightarrow X$  nullhomotop ist. Nach (1.10) existiert dann eine Abbildung  $F|_{S^{n-1}} = i \circ f: S^{n-1} \rightarrow X$ .

Da aber  $\text{Bild}(f) \subset A$  und  $i: A \rightarrow X$  die Inklusion ist, kann man  $F': (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, A)$  als eine Abbildung

$F': (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, A)$  auffassen mit  $f'|_{S^{n-1}} = f: S^{n-1} \rightarrow A$ , d.h.  $\partial[F'] = [f]$ .

Also gilt  $\text{Kern}(i_*) \subset \text{Bild}(\partial)$ .

- (3)  $\text{Bild}(i_*) = \text{Kern}(j_*)$

- (i) Sei eine Abbildung  $f': S^n \rightarrow A$  gegeben.

Dann ist  $j \circ i \circ f: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, A)$  mit  $f: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (A, \{x_0\})$  entsprechend (1.28) trivialerweise nullhomotop, denn  $j: (X, \{x_0\}) \rightarrow (X, A)$  und  $i: A \rightarrow X$  sind Inklusionen und  $\text{Bild}(f) \subset A$ . Also gilt  $\text{Bild}(i_*) \subset \text{Kern}(j_*)$ .

- (ii) Sei  $f: S^n \rightarrow X$  eine Abbildung, sodass  $j \circ f: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, A)$  nullhomotop ist.

Nach (1.30) existiert dann eine Abbildung  $g: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, A)$  mit  $\text{Bild}(g) \subset A$  und eine Homotopie  $h_t: j \circ f \simeq g: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, A) \text{ rel } S^{n-1}$ . Somit lässt sich  $g: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, A)$  als Abbildung  $g': S^n \rightarrow A$  auffassen und es existiert eine Homotopie  $h'_\tau: i \circ g' \simeq f: S^n \rightarrow X$ , d.h.  $\text{Kern}(j_*) \subset \text{Bild}(i_*)$ .

□

**1.32 Satz.** Seien ein topologischer Raum  $X$ , Unterräume  $B \subset A \subset X$  und ein Basispunkt  $\{x_0\} \in B$  gegeben.

$k: (A, \{x_0\}) \rightarrow (A, B)$ ,  $i: ((A, B) \rightarrow (X, B))$  und  $j: (X, B) \rightarrow (X, A)$  seien Inklusionen und  $\partial: \pi_n((X, A, x_0) \rightarrow \pi_{n-1}((A, B, x_0))$  sei folgende Hintereinanderschaltung:

$$\pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{k_*} \pi_{n-1}(A, B, x_0)$$

Dann ist die folgende Sequenz exakt:

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, B, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, B, x_0) \rightarrow \dots \\ \dots \longrightarrow \pi_2(X, A, x_0) \end{aligned}$$

Sie heißt exakte Homotopiesequenz des Tripels  $(X, A, B)$ .

*Beweis.* Da der Beweis in [22] sehr detailliert ausgeführt ist, verzichte ich hier auf seine Darstellung.  $\square$

Abschließend sei in diesem Paragraphen noch der Zusammenhang zwischen den Homotopie- und Homologiegruppen eines topologischen Paares  $(X, A)$  dargestellt. Hierbei setze ich die Grundlagen der singulären Homologie als bekannt voraus. Ferner habe ich auf die Ausführung von Beweisen verzichtet, da diese in [28] §6.3 sehr ausführlich dargestellt sind.

**1.33 Satz.** Sei  $(X, A)$  ein beliebiges topologisches Paar. Dann existiert zu jedem  $n \geq 2$  (bzw.  $n \geq 1$ , falls  $A = \{x_0\}$ ) ein (bis aufs Vorzeichen) eindeutig bestimmter Homomorphismus  $h_n: \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow H_n(X, A)$ , sodass gilt:

(i) Für  $n \geq 2$  ist folgendes Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(X, A, x_0) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(A, x_0) \\ \downarrow h_n & & \downarrow h'_{n-1} \\ H_n(X, A) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(A) \end{array}$$

(ii) Für jede Abbildung  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  ist folgendes Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(X, A, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_n(Y, B, y_0) \\ \downarrow h_n & & \downarrow h'_n \\ H_n(X, A) & \xrightarrow{f_*} & H_n(Y, B) \end{array}$$

Diese Homomorphismen heißen Hurewicz-Homomorphismen.

**1.34 Definition.** Ein topologisches Paar  $(X, A)$  heißt  $n$ -zusammenhängend, falls gilt:

- (i) Für jede Wegzusammenhangskomponente  $X_j, j \in J$  von  $X$  gilt  $X_j \cap A \neq \emptyset$ .
- (ii)  $\pi_r(X, A, x_0) = 0 \forall x_0 \in A$  und für  $2 \leq r \leq n$  (bzw.  $1 \leq r \leq n$  falls  $A = \{x_0\}$ ).

**1.35 Satz.**

- (a) Sei  $(X, A)$  ein  $n$ -zusammenhängendes topologisches Paar. Dann sind die Hurewicz-Homomorphismen  $h_r: \pi_r(X, A, x_0) \rightarrow H_r(X, A)$  für alle  $r \leq n + 1$  Isomorphismen.
- (b) Sei  $(X, A)$  ein topologisches Paar, sodass  $X$  und  $A$  1-zusammenhängend sind. Falls  $H_r(X, A) = 0$  für  $2 \leq r \leq n$  (bzw. für  $1 \leq r \leq n$  falls  $A = \{x_0\}$ ), so ist auch  $\pi_r(X, A, \{x_0\}) = 0$  für  $2 \leq r \leq n$  (bzw. für  $1 \leq r \leq n$  falls  $A = \{x_0\}$ ) und  $h_{n+1}: \pi_{n+1}(X, A, x_0) \rightarrow H_{n+1}(X, A)$  ein Isomorphismus.

**1.36 Satz.**  $(D^n, S^{n-1})$  und  $S^n$  sind  $(n-1)$ -zusammenhängend für alle  $n \geq 2$ .

*Beweis.* Da  $D^n$ ,  $n \geq 1$ , zusammenziehbar ist folgt aus der ersten exakten Homotopiesequenz des Paares  $(D^n, S^{n-1})$ , dass  $\pi_r(D^n, S^{n-1}, *)$  und  $\pi_{r-1}(S^{n-1}, *)$  isomorph sind. Ferner ist  $D^n$  wegzusammenhängend und  $D^n \cap S^{n-1} \neq \emptyset$ . Aus (1.35) ergibt sich nun wegen  $H_r(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & r=0, n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$  die Aussage des Satzes, falls nachgewiesen werden kann, dass  $S^{n-1}$ ,  $n \geq 2$ , 1-zusammenhängend ist.

Dazu seien  $u$  und  $v$  zwei verschiedene Punkte aus  $S^n - \{*\}$  und  $U := S^n - \{u\}$ ,  $V := S^n - \{v\}$ . Sei nun  $[f] \in \pi_1(S^n, \{*\})$ . Es existieren  $0 = t_0 \dots (t_r = 1)$ , sodass gilt: Für  $j = 1, \dots, r$  ist  $f([t_{j-1}, t_j])$  eine Teilmenge von  $U$  oder eine Teilmenge von  $V$ . Ferner gelte ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $f(t_j) \in U \cap V$ ,  $0 \leq j \leq r$ .

Definiere nun  $f_k: I \rightarrow S^n$  durch  $f_k(t) := f((1-t)t_{k-1} + t \cdot t_k)$ ,  $1 \leq k \leq r$ .  $g_k: I \rightarrow U \cap V$  sei ein Weg von  $\{*\}$  nach  $f(t_{k-1})$ ,  $2 \leq k \leq r$ . Solch ein Weg existiert für alle  $2 \leq k \leq r$ , da  $U \cap V \approx S^{n-1} \times \mathbb{R}$  wegen  $n \geq 2$  wegzusammenhängend ist.

Dann gilt:  $[f] = [f_1][g_2^{-1}][g_2][f_2] \dots [f_{n-1}][g_n^{-1}][g_n][f_n][f]$ , wobei  $g_k^{-1}: I \rightarrow U \cap V$  durch  $g_k^{-1}(t) := g_k(1-t)$  definiert sei.

Die  $[f_1][g_2^{-1}]$ ,  $[g_2][f_2][g_3^{-1}]$ ,  $\dots$ ,  $[g_{n-1}][f_{n-1}][g_n^{-1}]$ ,  $[g_n][f_n]$  liegen aber in  $j_*(\pi_1(U, *))$  oder in  $j_*(\pi_1(V, *))$ , wobei  $j: U \rightarrow S^n$ ,  $j: V \rightarrow S^n$  Inklusionen seien.

Also gilt  $\pi_1(S^n, *) = j_*(\pi_1(U, *)) \oplus j'_*(\pi_1(V, *))$ .  $U$  und  $V$  sind aber 1-zusammenhängend, da sie zusammenziehbar sind.

Also ist  $\pi_1(S^n, *) = 0$ , d.h.  $S^n$ ,  $n \geq 2$ , ist 1-zusammenhängend.  $\square$

## 2 CW-Räume

Die in §1 entwickelten Konzepte der Homotopietheorie sind im Allgemeinen recht schwierig in ihrer Handhabung. Einfacher wird es, wenn man nicht mehr beliebige topologische Räume zulässt, sondern zusätzliche Bedingungen an sie stellt. Als ziemlich günstig und meistens auch noch als hinreichend umfangreich hat sich die Familie der CW-Räume erwiesen. Ihre wichtigsten Eigenschaften sollen in diesem Paragraphen zusammengestellt werden.

### 2.1 Definition.

- (a) Seien ein topologisches Paar  $(X, A)$  und eine Abbildung  $f: A \rightarrow Y$  gegeben. Dann sei  $Y \cup_f X$  als der Raum definiert, der aus der disjunkten Vereinigung von  $X$  und  $Y$  entsteht, indem man jeden Punkt  $a \in A$  mit seinem Bild  $f(a) \in Y$  identifiziert.
- (b) Sei  $(X, A)$  ein topologisches Paar. Man sagt,  $X$  entsteht aus  $A$  durch Ankleben von  $n$ -Zellen  $e_j^n$ ,  $j \in J$ , mit der Klebeabbildung  $f: \bigcup_{j \in J} S_j^{n-1} \rightarrow A$ , wenn ein Homöomorphismus  $h: X \rightarrow A \cup_f (\bigcup_{j \in J} e_j^n) := A \cup_f (\bigcup_{j \in J} D_j^n)$  mit  $h(a) = a \forall a \in A$  existiert.

**2.2 Satz.** *Sei  $X$  ein Hausdorff-Raum und  $A \subset X$  abgeschlossen. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (i)  $X$  entsteht aus  $A$  durch Ankleben von  $n$ -Zellen  $e_j^n, j \in J$  mit der Klebeabbildung  $f: \bigcup_{j \in J} S_j^{n-1} \rightarrow A$ .
- (ii) Es existiert ein relativer Homöomorphismus  $\bar{f}: \bigcup_{j \in J} (D_j^n, S_j^{n-1}) \rightarrow (X, A)$  mit  $\bar{f}|_{\bigcup_{j \in J} S_j^{n-1}} = f: \bigcup_{j \in J} S_j^{n-1} \rightarrow A$ .

*Beweis.*

(i)  $\Rightarrow$  (ii) : Die Abbildung  $s: \bigcup_{j \in J} (D_j^n, S_j^{n-1}) \rightarrow (A \cup_f (\bigcup_{j \in J} e_j^n), A)$ , die jedem Punkt eine Äquivalenzklasse zuordnet, ist offensichtlich ein relativer Homöomorphismus. Die Abbildung  $h^{-1} \circ s: \bigcup_{j \in J} (D_j^n, S_j^{n-1}) \rightarrow (X, A)$  hat dann die gewünschten Eigenschaften, wobei  $h: X \rightarrow A \cup_f (\bigcup_{j \in J} e_j^n)$  der Homomorphismus aus (2.1(b)) sei.

(ii)  $\Rightarrow$  (i) : Definiere eine Abbildung  $\phi: A \cup_f (\bigcup_{j \in J} e_j^n) \rightarrow X$ ,  $\phi(z) := \begin{cases} z, & z \in A \\ \bar{f}(z), & z \in \bigcup_{j \in J} D_j^n \end{cases}$ .  
Offensichtlich ist diese Abbildung ein Homöomorphismus, d.h.  $X$  entsteht aus  $A$  durch Ankleben von  $n$ -Zellen  $e_j^n$ ,  $j \in J$ , mit der Klebeabbildung  $f: \bigcup_{j \in J} S_j^{n-1} \rightarrow A$ .  $\square$

### 2.3 Definition.

- (a) Ein topologisches Paar  $(X, A)$  heißt *relativer CW-Komplex*, falls gilt:
- (i)  $X$  ist ein Hausdorff-Raum.
  - (ii)  $A$  ist abgeschlossen in  $X$ .
  - (iii) Es existieren abgeschlossene Teilräume  $(X, A)^k$ ,  $k \geq 0$ , von  $X$ , sodass gilt:
    - (1)  $(X, A)^0$  entsteht aus  $A$  durch Ankleben von 0-Zellen.
    - (2) Für  $k \geq 1$  entsteht  $(X, A)^k$  aus  $(X, A)^{k-1}$  durch Ankleben von  $k$ -Zellen.
    - (3)  $X = \bigcup_{k \geq 0} (X, A)^k$ .
    - (4)  $B \subset X$  abgeschlossen  $\Leftrightarrow B \cap (X, A)^k \subset (X, A)^k$  abgeschlossen  $\forall k \geq 0$ .

$(X, A)^k$  heißt *k-Gerüst* von  $(X, A)$  und falls  $(X, A)^{n-1} \neq X = (X, A)^n$ , so heißt  $n$  die *Dimension* von  $(X, A)$ .

Falls  $A = \emptyset$ , heißt  $X := (X, \emptyset)$  *CW-Komplex* und sein  $k$ -Gerüst wird mit  $X^k$  bezeichnet.

Die durch die Kommutativität des folgenden Diagramms definierte Abbildung  $F_j: (D^k, S^{k-1}) \rightarrow ((X, A)^k, (X, A)^{k-1})$  heißt *charakteristische Abbildung* der  $k$ -Zelle  $e_j^k$ ,  $j \in J$ :

$$\begin{array}{ccc}
 (D^k, S^{k-1}) & \xrightarrow{\text{Inklusion}} & (D^k \times J, S^{k-1} \times J) \\
 & \searrow & \downarrow \bar{f} \\
 & & ((X, A)^{k-1} \cup_f (\bigcup_{j \in J} e_j^k), (X, A)^k) \\
 & \searrow F_j & \downarrow h^{-1} \\
 & & ((X, A)^k, (X, A)^{k-1})
 \end{array}$$

mit  $\bar{f}$  der relative Homöomorphismus aus (2.2) und  $h^{-1}$  der Homöomorphismus aus (2.1(b)).

Ein relativer CW-Komplex  $(X, A)$  heißt *endlich*, falls  $X$  aus  $A$  durch Ankleben endlich vieler Zellen entsteht.

- (b) Ein relativer CW-Komplex  $(Y, B)$  heißt *Teilkomplex* eines relativen CW-Komplexes  $(X, A)$ , falls  $Y \subset X$  abgeschlossen ist und  $(Y, B)^k = Y \cap (X, A)^k \forall k \geq 0$  gilt.
- (c) Ein CW-Paar  $(Z, C)$  ist ein *topologisches Paar*, wobei  $Z$  ein CW-Komplex und  $C$  ein Teilkomplex von  $Z$  ist.

### 2.4 Satz.

- (a) Sei  $(X, A)$  ein relativer CW-Komplex und  $A$  ein CW-Komplex. Dann ist  $X$  ein CW-Komplex.
- (b) Sei  $X$  ein CW-Komplex. Dann ist  $(X, X^k) \forall k \geq 0$  ein CW-Paar.

(c) Sei  $(X, A)$  ein relativer CW-Komplex. Dann ist sowohl  $(X, (X, A)^k)$  als auch  $((X, A)^k, A) \forall k \geq 0$  ein relativer CW-Komplex.

(d) Seien  $(X, A)$  und  $(Y, B)$  relative CW-Komplexe, von denen mindestens einer lokalkompakt ist. Dann ist  $(X, A) \times (Y, B) := (X \times Y, X \times B \cup A \times Y)$  ein relativer CW-Komplex.

(e) Sei  $(X, A)$  ein relativer CW-Komplex. Dann ist  $X/A$  ein CW-Komplex.

*Beweis.*

(a)  $X^k := A^k \cup ((X, A)^k - A)$

(b)  $X^k \subset X$  ist abgeschlossen und  $(X^k)^q := X^k \cap X^q$

(c)

$$(X, (X, A)^k)^q := \begin{cases} (X, A)^k, & q \leq k \\ (X, A)^q, & q > k \end{cases}$$

(d)

$$((X, A)^k, A)^q := \begin{cases} (X, A)^q, & q \leq k \\ (X, A)^k, & q > k \end{cases}$$

(e)  $(X \times Y, X \times B \cup A \times Y)^k := \bigcup_{i+j=k} ((X, A)^i \times (Y, B)^j) \cup X \times B \cup A \times Y$

(f)  $(X/A)^k := (X, A)^k / A$

□

**2.5 Satz.** Sei  $(X, A)$  ein relativer CW-Komplex. Dann gilt für alle  $n \geq 0$ :

$(X, A)^n$  ist ein strenger Deformationsretrakt von  $U$ , wobei  $U$  aus  $(X, A)^{n+1}$  entstehe, wenn man aus dem Inneren jeder  $(n+1)$ -Zelle  $e_j^{n+1}, j \in J$ , eine Punkt  $x_j$  entfernt.

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, dass  $x_j = F_j(0)$  ist, wobei  $F_j: (D^{n+1}, S^n) \rightarrow ((X, A)^{n+1}, (X, A)^n)$  die charakteristische Abbildung der  $(n+1)$ -Zelle  $e_j^{n+1}$  sei. Mit Hilfe der Abbildung  $H: U \times I \rightarrow U$ ,

$$H(x, t) := \begin{cases} F_j\left(\frac{F_j^{-1}(x)}{1-t+t\|F_j^{-1}(x)\|}\right), & x \in e_j^{n+1} - F_j(0), \quad t \in I \\ x, & x \in (X, A)^n, \quad t \in I \end{cases}$$

erkennt man sofort, dass  $(X, A)^n$  ein strenger Deformationsretrakt von  $U$  ist. □

**2.6 Definition.** Eine Abbildung  $f: X' \rightarrow X$  heißt *Cofaserung*, falls zu beliebigen Räumen  $Y$  und zu beliebigen Abbildungen  $g: X \rightarrow Y$  und  $G: X' \times I \rightarrow Y$  mit  $g(f(x')) = G(x', 0) \forall x' \in X'$  eine Abbildung  $H: X \times I \rightarrow Y$  existiert mit  $H(x, 0) = g(x) \forall x \in X$  und  $H(f(x'), t) = G(x', t) \forall x' \in X', t \in I$ .

**2.7 Satz.** Sei  $(X, A)$  ein relativer CW-Komplex. Dann ist die Inklusion  $i: A \rightarrow X$  eine Cofaserung.

*Beweis.* Sei ein beliebiger Raum  $Y$  und beliebige Abbildungen  $g: X \rightarrow Y$  und  $G: A \times I \rightarrow Y$  mit  $g(a) = G(a, 0) \forall a \in A$  gegeben. Definiere eine Abbildung  $H_0: X \times \{0\} \cup (X, A^0 \times I) \rightarrow Y$  durch

$$\begin{aligned} H_0(x, 0) &:= g(x) & \forall x \in X \\ H_0(a, t) &:= G(a, t) & \forall a \in A, t \in I \\ H_0(e_j^0, t) &:= g(e_j^0) & \forall 0\text{-Zellen } e_j^0, j \in J, t \in I \end{aligned}$$

Da  $(X, A)^0 - A$  diskret ist, ist  $H_0: X \times \{0\} \cup (X, A)^0 \times I \rightarrow Y$  stetig.

Sei nun eine Abbildung  $H_n: X \times \{0\} \cup (X, A)^n \times I \rightarrow Y, n \geq 0$  so definiert, dass  $H_n(x, 0) = g(x) \forall x \in X$  und  $H_n(a, t) = G(a, t) \forall a \in A, t \in I$  ist. Für  $n = 0$  ist  $H_0: X \times \{0\} \cup (X, A)^0 \times I \rightarrow Y$  solch eine Abbildung.

Sei  $e_k^{n+1}, k \in K$ , eine  $(n+1)$ -Zelle von  $(X, A)$ ,

$F_k: (D^{n+1}, S^n) \rightarrow ((X, A)^{n+1}, (X, A)^n)$  die zugehörige charakteristische Abbildung und  $r: D^{n+1} \times I \rightarrow D^{n+1} \times \{0\} \cup S^n \times I$  eine Retraktion (siehe (1.12(c))).

Definiere nun Abbildungen

$$\begin{aligned} r': (X, A)^{n+1} \times I &\rightarrow X \times \{0\} \cup (X, A)^n \times I & \text{durch} & r'(x, t) := (x, t) \\ & & & \forall x \in (X, A)^n, t \in I \\ & & \text{und} & r'(F_k(v), t) := (F_k \times id_I)(r(v, t)) \\ & & & \forall v \in D^{n+1}, t \in I, \\ H_{n+1}: X \times \{0\} \cup (X, A)^n \times I &\rightarrow Y & \text{durch} & H_{n+1}(x, t) := H_n(x, t) \\ & & & \forall (x, t) \in X \times \{0\} \cup (X, A)^n \times I \\ & & \text{und} & H_{n+1}(x, t) := H_n(r'(x, t)) \\ & & & \forall (x, t) \in (X, A)^{n+1} \times I. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Es gilt dann} & H_{n+1}(x, 0) = H_n(x, 0) = g(x) & \forall x \in X \\ \text{und} & H_{n+1}(a, t) = H_n(a, t) = G(a, t) & \forall (a, t) \in A \times I. \end{aligned}$$

Definiere nun die entsprechend (2.6) gesuchte Abbildung  $H: X \times I \rightarrow Y$  durch  $H(x, t) := H_q(x, t) \forall x \in (X, A)^q, t \in I$ . □

**2.8 Satz.** Sei  $(Y, B)$  ein  $n$ -zusammenhängendes topologisches Paar und  $(X, A)$  ein relativer CW-Komplex der Dimension  $r \leq n$ . Dann ist jede Abbildung  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  homotop relativ  $A$  zu einer Abbildung  $f': (X, A) \rightarrow (Y, B)$  mit  $Bild(f') \subset B$ .

*Beweis.* Der Beweis erfolgt durch Induktion über  $r = \dim(X, A)$ :

Im Fall  $r = 0$  ist  $X - A$  diskret und die Behauptung ergibt sich dadurch, dass  $B$  jede Wegzusammenhangskomponente von  $Y$  trifft. Also existiert zu jeder 0-Zelle  $e_j^0, j \in J$ , ein Weg in  $Y$ , der das Bild von  $e_j^0$  mit  $B$  verbindet. Betrachte diese Wege als Homotopie relativ  $A$  von  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  zu einer Abbildung  $f': (X, A) \rightarrow (Y, B)$  mit  $Bild(f') \subset B$ .

Sei nun  $n \geq 1$  und  $\dim(X, A) = r \leq n$ . Die Behauptung gelte für  $(r-1)$ -dimensionale CW-Komplexe. Weil  $f|((X, A)^{r-1}, A) \rightarrow (Y, B)$  homotop relativ  $A$  zu einer Abbildung  $g: ((X, A)^{r-1}, A) \rightarrow (Y, B)$  mit  $Bild(g) \subset B$ , existiert nach (2.7) eine Abbildung  $h \simeq f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  rel  $A$  mit  $h((X, A)^{r-1}) \subset B$ . Sei  $e_k, k \in K$ , eine  $r$ -Zelle mit charakteristischer Abbildung  $F_k: (D^r, S^{r-1}) \rightarrow ((X, A)^r, (X, A)^{r-1})$ . Da  $(Y, B)$   $n$ -zusammenhängend ist mit  $n \geq r$ , ist die Abbildung  $h \circ F_k: (D^r, S^{r-1}) \rightarrow (Y, B)$  homotop zu einer Abbildung  $h_k: (D^r, S^{r-1}) \rightarrow (Y, B)$  mit  $Bild(h_k) \subset B$ . Definiere

nun eine Abbildung  $f': (X, A) \rightarrow (Y, B)$  durch  $f'(x) := h(x) \forall x \in (X, A)^{r-1}$  und  $f'(F_k(v)) := h_k(v) \forall k \in K, v \in D^r$ . Dies ist offensichtlich die gesuchte Abbildung.  $\square$

## 2.9 Satz.

- (a)  $X$  entstehe aus  $A$  durch Ankleben von  $n$ -Zellen. Dann ist  $(X, A)$   $(n-1)$ -zusammenhängend für  $n \geq 1$ .
- (b) Sei  $(X, A)$  ein relativer CW-Komplex. Dann ist  $(X, (X, A)^n)$   $n$ -zusammenhängend für alle  $n \geq 0$ .

*Beweis.*

- (a) Sei eine Abbildung  $f: (D^k, S^{k-1}) \rightarrow (X, A), k \leq n-1$ , gegeben. Da  $Bild(f)$  kompakt ist existiert eine endliche Zahl von  $n$ -Zellen,  $e_1, \dots, e_m$ , von  $X-A$ , sodass gilt:  $Bild(f) \subset A \cup e_1 \cup \dots \cup e_m$ .

Für  $1 \leq i \leq m$  sei  $x_i$  ein Punkt aus dem Inneren von  $e_i$ . Dann ist jede der Mengen  $Y \cap Bild(f)$  und  $\dot{e}_i \cap Bild(f), 1 \leq i \leq m$ , offen in  $Bild(f)$ , wobei  $Y := A \cup (e_1 - \{x_1\}) \cup \dots \cup (e_m - \{x_m\})$  sei.

Sei  $K$  eine simpliziale Triangulation von  $D^k$ , sodass für jedes Simplex  $s \in K$  gilt, dass  $f(|s|)$  entweder eine Teilmenge von  $Y$  oder eine Teilmenge von  $\dot{e}_i$  für ein  $i \in \{1, \dots, m\}$  ist. Sei  $A'$  die Vereinigung aller  $|s|, s \in K$ , für die  $f(|s|) \subset Y$  gilt, und  $B_i, 1 \leq i \leq m$ , die Vereinigung aller  $|s|, s \in K$ , für die  $f(|s|) \subset \dot{e}_i$  gilt. Dann gilt:  $S^{k-1} \subset A', D^k = A' \cup B_1 \cup \dots \cup B_m$ , und aus  $i \neq j, i, j \in \{1, \dots, m\}$ , folgt  $(B_i - A') \cap (B_j - A') = \emptyset$ .

Sei  $\dot{B}_i := B_i \cap A', 1 \leq i \leq m$ . Dann ist  $(B_i, \dot{B}_i)$  ein relativer CW-Komplex mit  $dim(B_i, \dot{B}_i) \leq k \leq n-1$ . Für  $i \in \{1, \dots, m\}$  sind die Paare  $(\dot{e}_i, \dot{e}_i - \{x_i\})$  und  $(D^k - S^{k-1}, (D^k - S^{k-1}) - \{0\})$  homöomorph und besitzen die gleichen relativen Homotopiegruppen wie  $(D^k, S^{k-1})$ . Wegen (1.36) folgt mit (2.8), dass die Abbildung  $f|_{B_i}: (B_i, \dot{B}_i) \rightarrow (\dot{e}_i, \dot{e}_i - \{x_i\}), 1 \leq i \leq m$ , homotop relativ  $\dot{B}_i$  zu einer Abbildung  $f_i: (B_i, \dot{B}_i) \rightarrow (\dot{e}_i, \dot{e}_i - \{x_i\})$  ist mit  $Bild(f_i) \subset \dot{e}_i - \{x_i\}$ . Da  $(B_i - \dot{B}_i) \cap (B_j - \dot{B}_j) = \emptyset$  für  $i \neq j, i, j \in \{1, \dots, m\}$ , lassen sich diese Homotopien zu einer Komotopie relativ  $A$  von  $f: (D^k, S^{k-1}) \rightarrow (X, A)$  zu einer Abbildung  $f': (D^k, S^{k-1}) \rightarrow (X, A)$  mit  $Bild(f') \subset Y$  zusammenfügen.

Offensichtlich ist  $A$  aber ein strenger Deformationsretrakt von  $Y$ . Somit ist  $f': (D^k, S^{k-1}) \rightarrow (X, A)$  homotop relativ  $S^{k-1}$  zu einer Abbildung  $f'': (D^k, S^{k-1}) \rightarrow (X, A)$  mit  $Bild(f'') \subset A$ , d.h.  $f \simeq f' \simeq f'': (D^k, S^{k-1}) \rightarrow (X, A)$  rel  $S^{k-1}$ . Also ist  $(X, A)$   $(n-1)$ -zusammenhängend.

- (b) Zunächst wird durch Induktion über  $m$  gezeigt, dass  $((X, A)^m, (X, A)^n)$   $n$ -zusammenhängend ist für  $m > n$ :

Da  $(X, A)^{n+1}$  aus  $(X, A)^n$  durch Ankleben von  $(n+1)$ -Zellen entsteht, ist  $((X, A)^{n+1}, (X, A)^n)$  nach Teil (a)  $n$ -zusammenhängend. Sei nun  $m > n+1$  und  $((X, A)^{m-1}, (X, A)^n)$   $n$ -zusammenhängend. Nach Teil (a) ist  $((X, A)^m, (X, A)^{m-1})$   $(m-1)$ -zusammenhängend und wegen  $n < m-1$  also erst recht  $n$ -zusammenhängend. Also trifft  $(X, A)^n$  jede Wegzusammenhangskomponente von  $(X, A)^{m-1}$  und  $(X, A)^{m-1}$  jede Wegzusammenhangskomponente von  $(X, A)^m$ , d.h.  $(X, A)^n$  trifft jede Wegzusammenhangskomponente von  $(X, A)^m$ .

Ferner ist jede Abbildung  $f: (D^k, S^{k-1}) \rightarrow ((X, A)^m, (X, A)^n), 2 \leq k \leq n$ , wegen  $\pi_k((X, A)^m, (X, A)^{m-1}, x_0) = 0$  zunächst einmal homotop zu einer Abbildung, deren



Bild in  $(X, A)^{m-1}$  liegt, und wegen  $\pi_k((X, A)^{m-1}, (X, A)^n, x_0) = 0$  sogar homotop zu einer Abbildung, deren Bild in  $(X, A)^n$  liegt, d.h.  $\pi_k((X, A)^m, (X, A)^n, x_0) = 0, 2 \leq k \leq n$ . Also ist  $((X, A)^m, (X, A)^n)$   $n$ -zusammenhängend für  $m > n$ .

Um zu zeigen, dass  $(X, (X, A)^n)$   $n$ -zusammenhängend ist, sei eine Abbildung  $g: (D^r, S^{r-1}) \rightarrow (X, (X, A)^n), 1 \leq r \leq n$ , gegeben. Es existiert, da  $Bild(g) \subset X$  kompakt ist, ein  $m > n$ , sodass  $Bild(g) \subset (X, A)^m$  ist.

Betrachte  $g: (D^r, S^{r-1}) \rightarrow (X, (X, A)^n)$  nun als Abbildung  $g': (D^r, S^{r-1}) \rightarrow ((X, A)^m, (X, A)^n)$ .  $((X, A)^m, (X, A)^n)$  ist aber  $(n-1)$ -zusammenhängend d.h. es existiert eine Abbildung  $g'': (D^r, S^{r-1}) \rightarrow ((X, A)^m, (X, A)^n)$  mit  $Bild(g'') \subset (X, A)^n$ , die homotop relativ  $S^{r-1}$  zu  $g': (D^r, S^{r-1}) \rightarrow ((X, A)^m, (X, A)^n)$  ist.

Dann ist  $i \circ g'' \simeq g: (D^r, S^{r-1}) \rightarrow (X, (X, A)^n)$  rel  $S^{r-1}$ , wobei  $i: ((X, A)^m, (X, A)^n) \rightarrow (X, (X, A)^n)$  die Inklusion sei, und es gilt:  $Bild(i \circ g'') \subset (X, A)^n$ .

Also ist  $(X, (X, A)^n)$   $n$ -zusammenhängend

□

**2.10 Definition.** Seien  $(X, A)$  und  $(Y, B)$  relative CW-Komplexe. Eine Abbildung  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  heißt *zellulär*, falls für alle  $k \geq 0$  gilt:  $f((X, A)^k) \subset (Y, B)^k$ .

**2.11 Satz.** Sei  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  eine Abbildung zwischen relativen CW-Komplexen, deren Einschränkung auf einen Teilkomplex  $(X', A')$  von  $(X, A)$  zellulär ist. Dann existiert eine zelluläre Abbildung  $g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ , die homotop relativ  $X'$  zu  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  ist.

*Beweis.* Aus (2.9(b)), (2.8) und (2.7) folgt, dass eine Sequenz von Homotopien  $H_k: (X, A) \times I \rightarrow (Y, B), k \geq 0$ , rel  $X'$  existiert, sodass gilt:

- (i)  $H_0(x, 0) = f(x) \forall x \in X$
- (ii)  $H_k(x, 1) = H_{k+1}(x, 0) \forall x \in X$
- (iii)  $H_k: (X, A) \times I \rightarrow (Y, B)$  ist eine Homotopie relativ  $(X, A)^{k-1}$
- (iv)  $H_k((X, A)^k \times \{1\}) \subset (Y, B)^k$

Also ist  $H_k: (X, A) \times I \rightarrow (Y, B)$ , definiert durch

$$\begin{aligned} H(x, t) &:= H_{k-1}\left(x, \frac{t - (1 - \frac{1}{k})}{\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}}\right), \quad 1 - \frac{1}{k} \leq t \leq 1 - \frac{1}{k+1}, \quad x \in (X, A)^k \\ H(x, 1) &:= H_k(x, 1), \quad x \in (X, A)^k \end{aligned}$$

eine Homotopie mit den geforderten Eigenschaften.

□

**2.12 Korollar.**

- (a) Jede Abbildung zwischen CW-Komplexen ist homotop zu einer zellulären Abbildung.
- (b) Falls zwei zelluläre Abbildungen zwischen relativen CW-Komplexen homotop sind, so existiert eine zelluläre Homotopie zwischen ihnen.

**2.13 Definition.** Seien  $X$  und  $Y$  beliebige topologische Räume.

- (a) Eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  heißt  *$n$ -Äquivalenz*, falls gilt:

- (i)  $f: X \rightarrow Y$  induziert eine bijektive Zuordnung zwischen den Wegzusammenhangskomponenten von  $X$  und denen von  $Y$ .
- (ii) Der durch  $f: X \rightarrow Y$  induzierte Homomorphismus  $f_*: \pi_q(X, x_0) \rightarrow \pi_q(Y, y_0)$  ist für  $1 \leq q < n$  ein Isomorphismus und für  $q = n$  ein Epimorphismus.
- (b) Eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  heißt *schwache Homotopieäquivalenz*, falls sie für alle  $n \geq 1$  eine  $n$ -Äquivalenz ist.
- (c)  $X$  und  $Y$  heißen vom gleichen *schwachen Homotopietyp*, falls ein CW-Komplex  $Z$  und schwache Homotopieäquivalenzen  $f: Z \rightarrow X, g: Z \rightarrow Y$  existieren.

**2.14 Satz.**

- (a) Die Verknüpfung von  $n$ -Äquivalenzen ergibt eine  $n$ -Äquivalenz.
- (b) Eine Abbildung, die homotop zu einer  $n$ -Äquivalenz ist, ist selber eine  $n$ -Äquivalenz.
- (c) Jede Homotopieäquivalenz ist eine schwache Homotopieäquivalenz.
- (d) Eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  ist genau dann eine  $n$ -Äquivalenz, wenn  $(Z_f, X)$   $n$ -zusammenhängend ist, wobei  $Z_f$  der Raum sei, der sich aus der disjunkten Vereinigung von  $Y$  und  $X \times I$  ergibt, wenn man jeden Punkt  $(x, 0) \in X \times I$  mit  $f(x) \in Y$  identifiziert.  $Z_f$  heißt Abbildungszylinder von  $f: X \rightarrow Y$  und wegen  $\{(x, 1) \in Z_f \mid x \in X\} \approx X$  wird  $X$  als Teilraum von  $Z_f$  betrachtet.

*Beweis.* (a), (b) und (c) ergeben sich sofort aus (1.4) und (1.6).

- (d)  $r: Z_f \rightarrow Y$ , definiert durch  $r(x, t) := f(x) \forall (x, t) \in X \times I$  und  $r(y) := y \forall y \in Y$ , ist eine Homotopieäquivalenz und es gilt  $f(x) = r \circ i(x, 1) \forall x \in X$ . Also ist  $f: X \rightarrow Y$  genau dann eine  $n$ -Äquivalenz, wenn  $i: X \rightarrow Z_f$  eine  $n$ -Äquivalenz ist. Aus der exakten Homotopiesequenz des Paares  $(Z_f, X)$  ergibt sich aber, dass  $i: X \rightarrow Z_f$  genau dann eine  $n$ -Äquivalenz ist, wenn  $(Z_f, X)$   $n$ -zusammenhängend ist.

□

**2.15 Satz.** Sei  $f: X \rightarrow Y$  eine  $n$ -Äquivalenz und  $(P, Q)$  ein relativer CW-Komplex der Dimension  $\dim(P, Q) \leq n$ . Seien ferner Abbildungen  $g: Q \rightarrow X$  und  $h: P \rightarrow Y$  mit  $h(q) = f \circ g(q) \forall q \in Q$  gegeben. Dann existiert eine Abbildung  $g': P \rightarrow X$ , sodass  $g'(q) = g(q) \forall q \in Q$  und  $f \circ g' \simeq h: P \rightarrow Y \text{ rel } Q$  ist.

*Beweis.* Seien  $i: X \rightarrow Z_f$  und  $j: Y \rightarrow Z_f$  Inklusionen und die Retraktion  $r: Z_f \rightarrow Y$  das Homotopieinverse von  $j: Y \rightarrow Z_f$ . Dann existiert eine Homotopie  $k_t: i \circ g \simeq j \circ h|_Q: Q \rightarrow Z_f$ , sodass  $r \circ k_t: Q \rightarrow Y$  eine konstante Abbildung ist. Wegen (2.7) existiert eine Abbildung  $h': P \rightarrow Z_f$  mit  $h'(q) = i \circ g(q) \forall q \in Q$  und  $r \circ h' \simeq r \circ i \circ h: P \rightarrow Y \text{ rel } Q$ . Betrachte  $h': P \rightarrow Z_f$  deshalb als Abbildung  $h'': (P, Q) \rightarrow (Z_f, X)$ . Da  $(Z_f, X)$   $n$ -zusammenhängend und  $\dim(P, Q) \leq n$  ist, folgt mit (2.8), dass  $h'': (P, Q) \rightarrow (Z_f, X)$  homotop relativ  $Q$  zu einer Abbildung  $g'': (P, Q) \rightarrow (Z_f, X)$  mit  $\text{Bild}(g'') \subset X$  ist.

Definiere nun  $g': P \rightarrow X$  durch  $g'(p) := g''(p) \forall p \in P$ . Dann gilt  $g'(q) = g(q) \forall q \in Q$  und  $f \circ g' \simeq r \circ i \circ g' \simeq r \circ h' \simeq r \circ j \circ h \simeq h: P \rightarrow Y \text{ rel } Q$ .

Also ist  $g': P \rightarrow X$  die gesuchte Abbildung.

□

**2.16 Korollar.** Sei  $f: X \rightarrow Y$  eine  $n$ -Äquivalenz und  $P$  ein CW-Komplex. Dann gilt:

- (a)  $\dim(P) \leq n \Rightarrow f_*: [P, X] \rightarrow [P, Y]$  ist surjektiv.
- (b)  $\dim(P) < n \Rightarrow f_*: [P, X] \rightarrow [P, Y]$  ist injektiv.

*Beweis.*

- (a) ist eine direkte Konsequenz aus (2.15) mit  $Q = \emptyset$ .
- (b) Wende (2.15) auf den relativen CW-Komplex  $(P \times I, P \times \dot{I})$  an: Seien  $g_0, g_1: P \rightarrow X$  gegeben, sodass  $h_t: f \circ g_0 \simeq f \circ g_1: P \rightarrow Y$  ist. Definiere eine Abbildung  $g: P \times \dot{I} \rightarrow X$  durch  $g(p, t) := g_t(p), p \in P, t \in \dot{I}$ . Für die Abbildung  $h: P \times I \rightarrow Y, h(p, t) := h_t(p) \forall (p, t) \in P \times I$ , gilt dann:  $h(p, t) \simeq f \circ g(p, t) \forall (p, t) \in P \times \dot{I}$ . Wegen  $\dim(P \times I) \leq n$  folgt also mit (2.15), dass eine Abbildung  $g': P \times I \rightarrow X$  existiert, sodass  $g'(p, t) = g(p, t) \forall (p, t) \in P \times \dot{I}$  ist. Also definiert  $g': P \times I \rightarrow X$  eine Homotopie zwischen  $g_0: P \rightarrow X$  und  $g_1: P \rightarrow X$ .

□

**2.17 Korollar.**

- (a) Eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  zwischen CW-Komplexen ist genau dann eine Homotopieäquivalenz, wenn sie eine schwache Homotopieäquivalenz ist.
- (b) In (a) genügt es vorauszusetzen, dass  $X$  und  $Y$  vom gleichen Homotopietyp wie CW-Komplexe sind.

*Beweis.*

- (a) Dass eine Homotopieäquivalenz eine schwache Homotopieäquivalenz ist, wurde schon in (2.14(c)) bewiesen.  
Sei nun  $f: X \rightarrow Y$  eine schwache Homotopieäquivalenz zwischen CW-Komplexen. Aus (2.16) folgt dann, dass  $F: X \rightarrow Y$  Bijektionen  $f_*: [Y, X] \rightarrow [Y, Y]$  bzw.  $f_*: [X, X] \rightarrow [X, Y]$  induziert. Sei  $g: Y \rightarrow X$  eine Abbildung, sodass  $f_*[g] = [id_Y]$  ist. Dann ist  $f \circ g \simeq id_Y: Y \rightarrow Y$  und somit gilt:  $f_*[g \circ f] = [f \circ g \circ f] = [id_Y \circ f] = [f \circ id_X] = f_*[id_X]$ . Also erhält man  $[g \circ f] = [id_X]$ , d.h.  $g \circ f \simeq id_X: X \rightarrow X$ , d.h.  $f: X \rightarrow Y$  ist eine Homotopieäquivalenz.
- (b) Seien  $\bar{X}, \bar{Y}$  CW-Komplexe und  $g: X \rightarrow \bar{X}, h: Y \rightarrow \bar{Y}$  Homotopieäquivalenzen mit Homotopieinversen  $g^-: \bar{X} \rightarrow X$ , bzw.  $h^-: \bar{Y} \rightarrow Y$ . Sei  $\bar{f} := h \circ f \circ g^-: \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$ . Dann ist  $\bar{f}: \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$  nach (2.14(a)&(c)) eine schwache Homotopieäquivalenz und somit, da  $\bar{X}$  und  $\bar{Y}$  CW-Komplexe sind, eine Homotopieäquivalenz. Sei  $\bar{f}^-: \bar{Y} \rightarrow \bar{X}$  das Homotopieinverse und  $f^- := g^- \circ \bar{f}^- \circ h: Y \rightarrow X$ . Dann gilt wegen  $f \simeq h^- \circ \bar{f} \circ g: X \rightarrow Y: f \circ f^- \simeq id_Y: Y \rightarrow Y$  und  $f^- \circ f \simeq id_X: X \rightarrow X$ . Also ist  $f: X \rightarrow Y$  eine Homotopieäquivalenz.

□

Obwohl die Ergebnisse der Homologie im Allgemeinen als bekannt vorausgesetzt werden, sollen nun ein nicht so sehr verbreiteter Satz zitiert und einige Ergebnisse der zellulären Homologie von CW-Komplexen hergeleitet werden. Ziel ist eine Aussage von *Milnor*, die zwar häufig benutzt, aber selten vollständig bewiesen wird.

**2.18 Satz.** Seien  $X_1, X_2$  Teilkomplexe eines CW-Komplexes  $X$ , sodass  $X = X_1 \cup X_2$  ist und die Inklusionen  $e_i: (X_i, X_0) \rightarrow (X, X_0), i = 1, 2$ , Isomorphismen in der (Co-)Homologie induzieren, wobei  $X_0 := X_1 \cap X_2$  sei. Dann sind für jedes  $[X] \in H_n(X)$  in folgendem Diagramm alle Quadrate kommutativ:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & H^q(X, X_1) & \xrightarrow{j^*} & H^q(X) & \xrightarrow{i^*} & H^q(X_1) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(X, X_1) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow e_2^* \simeq & & \downarrow & & \downarrow \cap e_{1*}^{-1} j_*^*[X] & & \downarrow \simeq e_2^* & & \\
 & & H^q(X_2, X_0) & & \downarrow \cap [X] & & H_{n-q}(X_1, X_0) & & H^{q+1}(X_2, X_0) & & \\
 & & \downarrow \cap e_{2*}^{-1} j_*[X] & & \downarrow & & \downarrow \simeq e_{1*} & & \downarrow \cap e_{2*}^{-1} j_*[X] & & \\
 \dots & \longrightarrow & H_{n-q}(X_2) & \xrightarrow{i'_*} & H_{n-q}(X) & \xrightarrow{j'_*} & H_{n-q}(X, X_2) & \xrightarrow{\partial'} & H_{n-q-1}(X_2) & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

*Beweis.* Siehe [15], Chap. IX, §8, Lemma 8.1. □

**2.19 Satz.** Sei  $X$  ein endlich-dimensionaler CW-Komplex mit  $n$ -Zellen  $e_j^n, j \in J$ , und den zugehörigen charakteristischen Abbildungen

$F_j: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X^n, X^{n-1})$ . Dann gilt:

- (a)  $H_q(X^n, X^{n-1}) = 0 \forall q \neq n$ .
- (b)  $H_n(X^n, X^{n-1})$  ist eine freie abelsche Gruppe mit den Erzeugenden  $F_*(\zeta)$ ,  $j \in J$ , wobei  $\zeta$  der Erzeuger von  $H_n(D^n, S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$  sei.
- (c)  $H_q(X^n) = 0 \forall q > n$ .
- (d)  $H_q(X, X^n) = 0 \forall q \leq n$ .

*Beweis.*

- (a) & (b): Wähle aus dem Inneren jeder  $n$ -Zelle  $e_j^n, j \in J$ , einen Punkt  $s_j$  und  $S$  sei die Menge all dieser Punkte. Nach (2.5) ist  $X^{n-1}$  dann ein strenger Deformationsretrakt von  $X^n - S$ . Mit Hilfe der exakten Homologiesequenz des Tripels  $(X^n, X^n - S, X^{n-1})$  sieht man, dass  $H_q(X^n, X^{n-1})$  und  $H_q(X^n, X^n - S)$  isomorph sind. Wegen des Ausschneidungssatzes<sup>1</sup> ist  $H_q(X^n, X^n - S)$  isomorph zu  $H_q(\bigcup_{j \in J} e_j^n, \bigcup_{j \in J} (e_j^n - \{s_j\}))$  und wegen

$$\begin{aligned}
 H_q\left(\bigcup_{j \in J} e_j^n, \bigcup_{j \in J} (e_j^n - \{s_j\})\right) &= \bigoplus_{j \in J} H_q(e_j^n, e_j^n - \{s_j\}) \\
 &= \bigoplus_{j \in J} F_{j*}(H_q(D^n, S^{n-1}))
 \end{aligned}$$

ergeben sich die Aussagen (a) und (b).

<sup>1</sup> (Ausschneidungssatz) Seien  $U \subset A \subset X$  Räume, so dass der Abschluss  $\bar{U}$  von  $U$  im Inneren  $\dot{A}$  von  $A$  liegt (d.h.  $\bar{U} \cap \dot{A} = \emptyset$ ). Dann induziert die Inklusion  $i: (X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow (X, A)$  Isomorphismen  $i_*: H_q(X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow H_q(X, A)$ . [Ralph Stöcker, Heiner Zieschang: Algebraische Topologie - Eine Einführung, Satz 9.4.5]

- (c) Da  $X^0$  diskret ist, gilt  $H_q(X^0) = 0 \forall q > 0$ . Aus der exakten Homologiesequenz des Paares  $(X^n, X^{n-1})$  folgt mit (a) durch Induktion über  $n$ , dass  $H_q(X^n) = 0 \forall q > n$  ist.
- (d) Für  $q < n$  folgt mit (a) aus der exakten Homologiesequenz des Paares  $(X^{n+1}, X^n)$  durch Induktion über  $n$ , dass  $H_q(X^n)$  und  $H_q(X)$  isomorph sind. Aus der exakten Homologiesequenz des Paares  $(X, X^n)$  folgt dann  $H_q(X, X^n) = 0 \forall q \leq n$ .

□

**2.20 Definition.** Sei  $X$  ein CW-Komplex. Dann heißt  $C(X) := \{C_n(X), \partial_n\}$  mit  $C_n(X) := H_n(X^n, X^{n-1})$  und  $\partial_n: C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ , definiert durch die exakte Homologiesequenz des Tripels  $(X^n, X^{n-1}, X^{n-2})$ , *zellulärer Kettenkomplex* von  $X$ .  
Im Folgenden werde die Abbildung  $\partial_n: C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$  für alle  $n$  auch einfach mit  $\partial: C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$  bezeichnet.

**2.21 Satz.** Sei  $C(X) := \{C_n(X), \partial_n\}$  der zellulärer Kettenkomplex eines CW-Komplexes  $X$ . Dann ist  $Z_n(X)/B_n(X)$  isomorph zu  $H_n(X)$ , wobei  $Z_n(X) := \text{Kern}(\partial_n)$  und  $B_n(X) := \text{Bild}(\partial_{n+1})$  sei.

*Beweis.* Betrachte folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & H_n(X^{n-1}, X^{n-2}) = 0 & & \\
 & & & & \downarrow i''_* & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) & \xrightarrow{\partial'} & H_n(X^n, X^{n-2}) & \xrightarrow{i'_*} & H_n(X^{n+1}, X^{n-2}) & \xrightarrow{j'_*} & \underbrace{H_n(X^{n+1}, X^n)}_{=0} \\
 & \searrow \partial_{n+1} & \downarrow j''_* & & & & \\
 & & H_n(X^n, X^{n-1}) & & & & \\
 & & \downarrow \partial'' & & & & \\
 & & H_n(X^{n-1}, X^{n-2}) & & & & 
 \end{array}$$

Darin ist die horizontale Linie ein Teil der exakten Homologiesequenz des Tripels  $(X^{n+1}, X^n, X^{n-2})$  und die vertikale Linie ein Teil der exakten Homologiesequenz des Tripels  $(X^n, X^{n-1}, X^{n-2})$ . Man ersieht aus diesem Diagramm sofort, dass  $Z_n(X) \cong H_n(X^n, X^{n-2})$  und  $Z^n(X)/B^n(X) \cong H_n(X^{n+1}, X^{n-2})$  ist. Aus (2.19(c)&(d)) folgt aber  $H_n(X^{n+1}, X^{n-2}) \cong H_n(X^{n+1}) \cong H_n(X)$  und somit ergibt sich die Aussage des Satzes. □

**2.22 Definition.** Sei  $X$  ein endlich-dimensionaler CW-Komplex,  $A := (A_n, \alpha_n)$  ein freier Kettenkomplex und  $\psi: A \rightarrow C(X)$  eine Kettenabbildung. Unter einer *Realisation* von  $\psi: A \rightarrow C(X)$  versteht man ein Paar  $(Y, f)$ , bestehend aus einem CW-Komplex  $Y$  und einer zellulären Abbildung  $f: Y \rightarrow X$ , sodass  $C_n(Y) = A_n \forall n$  und  $f_{\#} = \psi: C(Y) \rightarrow C(X)$  gilt.

**2.23 Satz.** Sei  $X$  ein 1-zusammenhängender, endlich-dimensionaler CW-Komplex,  $A := (A_n, \alpha_n)$  ein freier Kettenkomplex mit  $A_0 := \mathbb{Z}$  und  $A_1 := 0$ . Ferner sei eine Kettenabbildung  $\psi: A \rightarrow C(X)$  gegeben, die Isomorphismen in der Homologie induziert. Dann besitzt  $\psi: A \rightarrow C(X)$  eine Realisation.

*Beweis.* Definiere  $A_n^m := \begin{cases} A_n, & n \leq m \\ 0, & n > m \end{cases}$  und  $\alpha_n^m: A_n^m \rightarrow A_{n-1}^m$  durch  $\alpha_n^m(a) := \alpha_n(a) \forall a \in A_n^m, m \geq 0$ . Dann ist  $A^m := (A_n^m, \alpha_n^m)$  für alle  $m \geq 0$  ein freier Teilkettenkomplex von  $A$ . Sei  $\psi^m: A^m \rightarrow C(X^m)$  die durch  $\psi: A \rightarrow C(X)$  definierte Kettenabbildung. Definiere nun induktiv bzgl.  $m$  Realisierungen  $(K^m, f^m)$  von  $\psi^m: A^m \rightarrow C(X^m)$  mit  $f^m|_{K^{m-1}} = i \circ f^{m-1}: K^{m-1} \rightarrow X^m$ :

$$\begin{aligned} K^0 &:= \{*\}, & f^0: K^0 &\rightarrow X^0, & * &\rightarrow x_0 \\ K^1 &:= K^0, & f^1: K^1 &\rightarrow X^1, & * &\rightarrow x_0 \end{aligned}$$

Sei nun  $\psi^{m-1}: A^{m-1} \rightarrow C(X^{m-1})$  schon durch eine zelluläre Abbildung  $g: K^{m-1} \rightarrow X^{m-1}$  realisiert. Bilde den Abbildungszylinder  $Z_g$  und betrachte folgendes kommutative Diagramm von Kettenkomplexen und Kettenabbildungen:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A^{m-1} & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A/A^{m-1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow id & & \downarrow \theta & & \downarrow \theta' \\ & & C(X) & \longrightarrow & C(X)/C(X^{m-1}) & & \\ & & \swarrow j_{\#} & & \swarrow r'_{\#} & & \\ 0 & \longrightarrow & C(K^{m-1}) & \longrightarrow & C(Z_g) & \longrightarrow & C(Z_g)/C(K^{m-1}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Darin sei  $j: X \rightarrow Z_g$  die Inklusion und  $r: Z_g \rightarrow X$ , bzw.  $r': (Z_g, K^{m-1}) \rightarrow (X, X^{m-1})$  seien Retraktionen. Die Zeilen sind kurze exakte Sequenzen von Kettenkomplexen.

Also existiert eine Abbildung von der Homologiesequenz von  $(A, A^{m-1})$  in die Homologiesequenz von  $(Z_g, K^{m-1})$ . Da  $\theta_* = j_* \circ \psi_*: H_q(A) \rightarrow H_q(Z_g) \forall q \geq 0$  ein Isomorphismus ist, ist nach dem 5-er-Lemma auch  $\theta'_*: H_q(A, A^{m-1}) \rightarrow H_q(Z_g, K^{m-1}) \forall q \geq 0$  ein Isomorphismus.

Da  $i_* \circ g_*: H_q(K^{m-1}) \rightarrow H_q(X)$  für alle  $q < m-1$  ein Isomorphismus und für  $q = m-1$  ein Epimorphismus ist, gilt  $H_q(Z_g, K^{m-1}) = 0 \forall q \leq m-1$ . Ferner ist nach (1.35) der Hurewicz-Homomorphismus  $h_m: \pi_m(Z_g, K^{m-1}, *) \rightarrow H_m(Z_g, K^{m-1})$  ein Isomorphismus, weil  $K^{m-1}$  1-zusammenhängend ist. Sei nun  $\theta'': A_m^m \rightarrow \pi_m(Z_g, K^{m-1}, *)$  folgende Hintereinanderschaltung von Abbildungen:

$$A_m^m \rightarrow A_m^m/\alpha(A_{m+1}) = H_m(A/A^{m-1}) \xrightarrow{\theta'_*} H_m(Z_g, K^{m-1}) \xrightarrow{h_m^{-1}} \pi_m(Z_g, K^{m-1}, *)$$

Ferner sei  $\{a_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$  eine Basis von  $A_m^m = A_m$ . Wähle zu jedem  $\lambda \in \Lambda$  eine Abbildung  $k_\lambda: S^{m-1} \rightarrow K^{m-1}$  aus der Homotopieklasse  $\partial \circ \theta''(a_\lambda) \in \pi_{m-1}(K^{m-1}, *)$ . Sei  $k: \bigcup_{\lambda \in \Lambda} S^{m-1} \rightarrow K^{m-1}$  durch die  $k_\lambda: S^{m-1} \rightarrow K^{m-1}, \lambda \in \Lambda$ , definiert und  $K^m := K^{m-1} \cup_k (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} e^m)$ . Dann gilt  $C_n(K^m) = A_n \forall n \leq m$ . Nach (1.35) gilt ferner:

$$\begin{aligned} C_m(K^m) &= H_m(K^m, K^{m-1}) \simeq \pi_m(K^m, K^{m-1}, *) \\ C_m(X) &= H_m(X^m, X^{m-1}) \simeq \pi_m(X^m, X^{m-1}, x_0) \end{aligned}$$

Da das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A_m & \xrightarrow{\theta_{\sharp}} & C_m(Z_g)/C_m(K^{m-1}) \\ \psi' \downarrow & & \downarrow r'_{\sharp} \\ C_m(X^m)/C_m(X^{m-1}) & \xrightarrow{i_{\sharp}} & C_m(X)/C_m(X^{m-1}) \end{array}$$

kommutiert, ist auch folgendes Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} A_m \cong \pi_m(K^m, K^{m-1}, *) & \xrightarrow{\theta''} & \pi_m(Z_g, K^{m-1}, *) \\ \psi'_* \downarrow & & \downarrow r'_* \\ \pi_m(X^m, X^{m-1}, \{x_0\}) & \xrightarrow{i_*} & \pi_m(X, X^{m-1}, \{x_0\}) \end{array}$$

Sei  $k'_\lambda : (D^m, S^{m-1}) \rightarrow (K^m, K^{m-1})$ ,  $\lambda \in \Lambda$ , die charakteristische Abbildung der  $m$ -Zelle  $e^m$  von  $K^m$ , d.h.  $k'_\lambda|_{S^{m-1}} = k_\lambda : S^{m-1} \rightarrow K^{m-1}$ . Sei  $k''_\lambda : (D^m, S^{m-1}) \rightarrow (Z_g, K^{m-1})$  ein Repräsentant von  $\theta''(a^\lambda) \in \pi_m(Z_g, K^{m-1}, *)$ . Dann gilt wegen des letzten Diagramms und wegen  $k_\lambda = k''_\lambda|_{S^{m-1}} : S^{m-1} \rightarrow K^{m-1}$  und  $\psi'_* = g_* : A_{m-1} \rightarrow \pi_m(X^m, X^{m-1}, x_0)$ :  $r' \circ k''_\lambda|_{S^{m-1}} \simeq g \circ k_\lambda : S^{m-1} \rightarrow X^{m-1}$ . Also existiert nach (2.7) eine Fortsetzung  $\bar{f}_\lambda^m : (D^m, S^{m-1}) \rightarrow (X, X^{m-1})$  von  $g \circ k_\lambda : S^{m-1} \rightarrow X^{m-1}$ , die homotop zu der Abbildung  $r' \circ k''_\lambda : (D^m, S^{m-1}) \rightarrow (X, X^{m-1})$  ist.

Sei  $\bar{f}^m : (K^m, K^{m-1}) \rightarrow (X^m, X^{m-1})$  die durch die  $\bar{f}_\lambda^m : (D^m, S^{m-1}) \rightarrow (X, X^{m-1})$ ,  $\lambda \in \Lambda$ , definierte Abbildung. Nach (2.11) existiert dann eine zelluläre Abbildung  $\bar{\bar{f}}^m : (K^m, K^{m-1}) \rightarrow (X^m, X^{m-1})$ , die homotop relativ  $K^{m-1}$  zu  $\bar{f}^m : (K^m, K^{m-1}) \rightarrow (X, X^{m-1})$  ist. Wegen  $\bar{f}^m|_{K^{m-1}} = \bar{\bar{f}}^m|_{K^{m-1}} : K^{m-1} \rightarrow X^{m-1}$  gilt also:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{f}}^m|_{K^{m-1}} &= g : K^{m-1} \rightarrow X^{m-1} \\ i \circ \bar{\bar{f}}^m|_{e_\lambda^m} &\simeq r' \circ k''_\lambda : (D^m, S^{m-1}) \rightarrow (X, X^{m-1}), \lambda \in \Lambda \end{aligned}$$

Daraus folgt aber  $i_* \circ \bar{\bar{f}}^m(a_\lambda) = i_* \circ \psi'_*(a_\lambda) \forall \lambda \in \Lambda$  wegen des letzten Diagramms und wegen  $[k''_\lambda] = \theta''(a_\lambda)$ ,  $\lambda \in \Lambda$ . Sei nun  $\bar{k}_\lambda : (D^m, S^{m-1}) \rightarrow (X^m, X^{m-1})$  ein Repräsentant von  $\psi'_*(a_\lambda) = \psi'_*[k'_\lambda] \in \pi_m(X^m, X^{m-1}, x_0)$ . Dann gilt wegen  $k'_\lambda|_{S^{m-1}} = k_\lambda : S^{m-1} \rightarrow X^{m-1}$

$$\begin{aligned} [\bar{k}_\lambda|_{S^{m-1}}] &= \partial[\bar{k}_\lambda] &= \partial \circ \psi'_*[k'_\lambda] \\ &= \psi'_* \circ \partial[k'_\lambda] &= \psi'_*[k_\lambda] \\ &= g_*[k_\lambda] &= g_* \circ \partial[k'_\lambda] \\ &= [\bar{\bar{f}}^m \circ k'_\lambda|_{S^{m-1}}] \in \pi_{m-1}(X^{m-1}, x_0) \end{aligned}$$

Mit (2.7) folgt nun, dass eine zu  $\bar{k}_\lambda : (D^m, S^{m-1}) \rightarrow (X^m, X^{m-1})$  homotope Abbildung  $\tilde{f}^m : (D^m, S^{m-1}) \rightarrow (X^m, X^{m-1})$  existiert. Definiere mit diesen  $\tilde{f}^m : (D^m, S^{m-1}) \rightarrow (X^m, X^{m-1})$ ,  $\lambda \in \Lambda$ , eine Abbildung  $f^m : K^m \rightarrow X^m$ . Wegen  $f^m(a_\lambda) = \bar{k}_{\lambda*}(a_\lambda) = \psi'_*(a_\lambda)$ ,  $\lambda \in \Lambda$ , gilt dann  $\psi'_* = f^m_* : \pi_m(K^m, K^{m-1}, *) \rightarrow \pi_m(X^m, X^{m-1}, x_0)$ . Also gilt  $f^m_{\sharp} = \psi^m : A_m \rightarrow C_m(X)$ .

Somit bilden  $K := \bigcup_{m \geq 0} K^m$  und  $f : K \rightarrow X$ ,  $f(z) := f^m(z) \forall z \in K^m$ , eine Realisation von  $\psi : A \rightarrow C(X)$ .  $\square$

**2.24 Satz.** Sei  $X$  ein 1-zusammenhängender, endlich-dimensionaler CW-Komplex. Für alle  $q \geq 0$  besitze  $H_q(X)$  den Rang  $\beta_q$  und  $\tau_q$  Torsionskoeffizienten. Dann existiert ein CW-Komplex  $Y$ , der vom gleichen Homotopietyp ist wie  $X$  und der genau  $\beta_q + \tau_q + \tau_{q-1}$   $q$ -Zellen,  $q \geq 0$ , besitzt.

*Beweis.* Sei  $\{v_1^q, \dots, v_{\beta_q}^q, w_1^q, \dots, w_{\tau_q}^q\}$  eine Basis von  $H_q(X)$ ,  $q \geq 0$ , und  $A_q$  die von  $\{v_1^q, \dots, v_{\beta_q}^q, w_1^q, \dots, w_{\tau_q}^q, w_1^{q-1}, \dots, w_{\tau_{q-1}}^{q-1}\}$  erzeugte freie Gruppe,  $q \geq 0$ . Definiere Abbildungen  $\alpha_q: A_q \rightarrow A_{q-1}$ ,  $q \geq 1$ , durch

$$(v_1^q, \dots, v_{\beta_q}^q, w_1^q, \dots, w_{\tau_q}^q, w_1^{q-1}, \dots, w_{\tau_{q-1}}^{q-1}) \rightarrow (t_1^{q-1} w_1^{q-1}, \dots, t_{\tau_{q-1}}^{q-1} w_{\tau_{q-1}}^{q-1})$$

wobei  $t_i^{q-1}$  die Ordnung von  $w_i^{q-1}$  in  $H_{q-1}(X)$  sei,  $1 \leq i \leq \tau_{q-1}$ .

Dann ist  $\alpha_{q-1} \circ \alpha_q = 0: A_q \rightarrow A_{q-2}$  und somit ist  $A := (A_q, \alpha_q)$  ein freier Kettenkomplex. Wegen  $\beta_1 = \tau_1 = \tau_0 = 0$  gilt  $A_0 \cong \mathbb{Z}$  und  $A_1 = 0$ . Wegen  $t_i^{q-1} w_i^{q-1} = 0$  in  $H_{q-1}(X)$  existiert zu jedem  $i \in \{1, \dots, \tau_{q-1}\}$  eine Kette  $c_i \in H_q(X^q, X^{q-1})$  mit  $\partial(c_i) = t_i^{q-1} w_i^{q-1}$ .

Sei  $A'_q$  die von  $\{w_1^{q-1}, \dots, w_{\tau_{q-1}}^{q-1}\}$  erzeugte freie Untergruppe von  $A_q$  und  $\rho_q: A'_q \rightarrow H_q(X^q, X^{q-1})$  durch  $\partial \circ \rho_q(w_i^{q-1}) := t_i^{q-1} w_i^{q-1}$ ,  $1 \leq i \leq \tau_{q-1}$ , definiert.

Für die durch

$$(v_1^q, \dots, v_{\beta_q}^q, w_1^q, \dots, w_{\tau_q}^q, w_1^{q-1}, \dots, w_{\tau_{q-1}}^{q-1}) \rightarrow (v_1^q, \dots, v_{\beta_q}^q, w_1^q, \dots, w_{\tau_q}^q, \rho_q(w_1^{q-1}), \dots, \rho_q(w_{\tau_{q-1}}^{q-1}))$$

definierte Abbildung  $f_q: A_q \rightarrow H_q(X^q, X^{q-1})$  gilt dann:

$$\partial \circ f_q(v_1^q, \dots, v_{\beta_q}^q, w_1^q, \dots, w_{\tau_q}^q, w_1^{q-1}, \dots, w_{\tau_{q-1}}^{q-1}) = (t_1^{q-1} w_1^{q-1}, \dots, t_{\tau_{q-1}}^{q-1} w_{\tau_{q-1}}^{q-1})$$

da die  $v_j^q, w_l^q$ ,  $1 \leq j \leq \beta_q$ ,  $1 \leq l \leq \tau_q$ , Zyklen sind,

und  $f_{q-1} \circ \alpha_q = \partial \circ f_q: A_q \rightarrow H_{q-1}(X^{q-1}, X^{q-2})$ .

Also wird durch die  $f_q: A_q \rightarrow H_q(X^q, X^{q-1})$ ,  $q \geq 0$ , eine Kettenabbildung  $f: A \rightarrow C(X)$  definiert.

Offensichtlich ist  $f_{q*}: \text{Kern}(\alpha_q) / \text{Bild}(\alpha_{q+1}) \rightarrow H_q(X)$  wegen

$$\text{Kern}(\alpha_q) / \text{Bild}(\alpha_{q+1}) = \langle v_1^q, \dots, v_{\beta_q}^q, w_1^q, \dots, w_{\tau_q}^q | t_1^q w_1^q, \dots, t_{\tau_q}^q w_{\tau_q}^q \rangle$$

für alle  $q \geq 0$  ein Isomorphismus. Nach (2.23) existiert also eine Realisation von  $f: A \rightarrow C(X)$ , d.h. ein CW-Komplex  $Y$  und eine zelluläre Abbildung  $g: Y \rightarrow X$ , sodass  $C(Y) = A$  und  $g_* = f: C(Y) \rightarrow C(X)$  gilt.

$g: Y \rightarrow X$  induziert also Isomorphismen in der Homologie und, da  $X$  und  $Y$  1-zusammenhängend sind, nach (1.35) auch Isomorphismen zwischen den Homotopiegruppen von  $Y$  und  $X$ , d.h.  $g: Y \rightarrow X$  ist eine schwache Homotopieäquivalenz und somit nach (2.17) eine Homotopieäquivalenz.

$X$  und  $Y$  sind also vom gleichen Homotopietyp und wegen  $H_q(Y^q, Y^{q-1}) = A_q$  besitzt  $Y$  nach (2.19(c)) genau  $\beta_q + \tau_q + \tau_{q-1}$   $q$ -Zellen,  $q \geq 0$ .  $\square$



### 3 Faserungen und Faserbündel

Sei  $LF(B)$  die Menge der Faserhomotopieäquivalenzklassen von Faserungen über  $B$  mit lokalkompaktem CW-Komplex  $F$  als Faser,  $QF(B)$  die Menge der Strukturäquivalenzklassen von Prinzipal- $H(F)$ -Quasifaserungen über  $B$ ,  $\tilde{L}F_G(B)$  die Menge von Äquivalenzklassen von Prinzipal- $G$ -Bündeln über  $B$ . Die wesentlichen Erkenntnisse dieses Paragraphen sind eine Bijektion zwischen  $\tilde{L}F_G(B)$  und  $\tilde{Q}F_G(B)$ , bzw. eine Bijektion zwischen  $LF(B)$  und  $QF(B)$ , falls  $B$  ein CW-Komplex ist. Ferner werden noch einige für §4 wichtige Ergebnisse hergeleitet.

#### 3.1 Definition.

- (a) Eine surjektive Abbildung  $p: E \rightarrow B$  heißt *Quasifaserung* (über  $B$ ), falls  $p_*: \pi_i(E, p^{-1}(p(e)), e) \rightarrow \pi_i(B, p(e))$  für alle  $i \geq 0$  und für alle  $e \in E$  ein Isomorphismus ist.
- (b) Eine Quasifaserung  $p: E \rightarrow B$  heißt *Quasifaserung mit Faser  $F$* , falls ein topologischer Raum  $F$  existiert, sodass  $F$  und  $p^{-1}(b)$  für alle  $b \in B$  vom gleichen schwachen Homotopietyp sind.
- (c) Zwei Quasifaserungen  $p: E \rightarrow B$  und  $p': E' \rightarrow B'$  heißen *schwach quasiäquivalent*, falls schwache Homotopieäquivalenzen  $\bar{f}: E \rightarrow E'$  und  $f: B \rightarrow B'$  existieren, sodass  $p' \circ \bar{f} = f \circ p: E \rightarrow B'$  gilt.
- (d) Zwei Quasifaserungen  $p: E \rightarrow B$  und  $p': E' \rightarrow B$  heißen *quasiäquivalent*, falls Quasifaserungen  $p_i: E_i \rightarrow B, i = 1, \dots, n$ , mit  $E_1 := E, E_n := E', p_1 := p: E \rightarrow B$  und  $p_n := p': E' \rightarrow B$  und zu jedem  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  entweder eine schwache Homotopieäquivalenz  $f_i: E_i \rightarrow E_{i+1}$  mit  $p_{i+1} \circ f_i = p_i: E_i \rightarrow B$  oder eine schwache Homotopieäquivalenz  $\bar{f}: E_{i+1} \rightarrow E_i$  mit  $p_i \circ \bar{f}_i = p_{i+1}: E_{i+1} \rightarrow B$  existieren.

Bei dieser Definition ist Folgendes zu beachten:

Ist  $X$  ein topologischer Raum und  $x \in A \subset X$ , so versteht man unter  $\pi_0(X, x)$  die Menge der Wegzusammenhangskomponenten von  $X$  und die Wegzusammenhangskomponente von  $x$  sei das neutrale Element von  $\pi_0(X, x)$ .  $\pi_0(X, A, x)$  entstehe aus  $\pi_0(X, x)$ , indem man alle Wegzusammenhangskomponenten, die  $A$  treffen, identifiziert; diese Wegzusammenhangskomponenten bilden das neutrale Element von  $\pi_0(X, A, x)$ . Die Elemente von  $\pi_0(X, A, x)$  sind die Homotopieklassen der stetigen Abbildungen  $f: I \rightarrow X$  mit  $f(0) = x$  und  $f(1) \in A$ ; dabei sind nur solche Homotopien erlaubt, die den Bildpunkt von 0 festlassen und den Bildpunkt von 1 innerhalb von  $A$  bewegen. Die konstante Abbildung  $f: I \rightarrow X, f(t) = x \forall t \in I$ , repräsentiert das neutrale Element von  $\pi_0(X, A, x)$ . Die Isomorphie in (3.1(a)) ist für  $i = 0, 1$  als bijektive Beziehung zwischen den so definierten Mengen mit neutralem Element aufzufassen.

**3.2 Satz.** *Sei  $p: E \rightarrow B$  eine Quasifaserung. Dann ist folgende Sequenz für alle  $e \in E$  exakt:*

$$\begin{aligned} \dots &\longrightarrow \pi_i(p^{-1}(p(e)), e) \xrightarrow{i_*} \pi_i(E, e) \xrightarrow{p_*} \pi_i(B, p(e)) \\ &\xrightarrow{\bar{\partial}} \pi_{i-1}(p^{-1}(p(e)), e) \longrightarrow \dots \longrightarrow \pi_0(B, p(e)) \end{aligned}$$

Darin sei  $\bar{\partial}: \pi_i(B, p(e)) \rightarrow \pi_{i-1}(p^{-1}(p(e)), e)$  die Komposition folgender Homomorphismen:

$$p_*^{-1}: \pi_i(B, p(e)) \rightarrow \pi_i(E, p^{-1}(p(e)), e)$$

$\partial: \pi_i(E, p^{-1}(p(e)), e) \rightarrow \pi_{i-1}(p^{-1}(p(e)), e)$ , der Randoperator aus der exakten Homotopiesequenz des Paares  $(E, p^{-1}(p(e)))$ .

Die obige Sequenz heißt exakten Homotopiesequenz der Quasifaserung  $p: E \rightarrow B$ .

*Beweis.* Die Behauptung ergibt sich sofort mit obiger Definition von  $\bar{\partial}: \pi_i(B, p(e)) \rightarrow \pi_{i-1}(p^{-1}(p(e)), e)$  und wegen (3.1(a)) aus der exakten Homotopiesequenz des Paares  $(E, p^{-1}(p(e)))$ .  $\square$

**3.3 Definition.** Sei eine Abbildung  $p: E \rightarrow B$  und eine Teilmenge  $U$  von  $B$  gegeben.

$U$  heißt *ausgezeichnet*, falls  $U \subset \text{Bild}(p)$  und

$p_*: \pi_i(p^{-1}(U), p^{-1}(p(e)), e) \rightarrow \pi_i(U, p(e))$  für alle  $i \geq 0$  und für alle  $e \in p^{-1}(U)$  ein Isomorphismus ist.

**3.4 Satz.** Sei eine Abbildung  $p: E \rightarrow B$  und eine ausgezeichnete Teilmenge  $U \subset B$  gegeben. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i)  $p_*: \pi_i(E, p^{-1}(p(e)), e) \rightarrow \pi_i(B, p(e))$  ist für alle  $i \geq 0$  und für alle  $e \in p^{-1}(U)$  ein Isomorphismus.

(ii)  $p_*: \pi_i(E, p^{-1}(U), e) \rightarrow \pi_i(B, U, p(e))$  ist für alle  $i \geq 0$  und für alle  $e \in p^{-1}(U)$  ein Isomorphismus.

*Beweis.* Betrachte folgendes kommutative Diagramm, in dem die untere Zeile die exakte Homotopiesequenz des Paares  $(B, U)$  und die obere Zeile die des Tripels  $(E, p^{-1}(U), p^{-1}(p(e)))$ ,  $e \in p^{-1}(U)$ , sei:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \pi_i(p^{-1}(U), p^{-1}(p(e)), e) & \longrightarrow & \pi_i(E, p^{-1}(p(e)), e) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow p_* & & \downarrow p_* & & \\ \dots & \longrightarrow & \pi_i(U, p(e)) & \longrightarrow & \pi_i(B, p(e)) & \longrightarrow & \dots \\ & & & & & & \\ & \longrightarrow & \pi_i(E, p^{-1}(U), e) & \longrightarrow & \pi_{i-1}(p^{-1}(U), p^{-1}(p(e)), e) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow p_* & & \downarrow p_* & & \\ & \longrightarrow & \pi_i(B, U, p(e)) & \longrightarrow & \pi_{i-1}(U, p(e)) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Unter der Voraussetzung (i) oder (ii) ist jeder, außer eventuell jeder dritte senkrechte Homomorphismus ein Isomorphismus. Die Behauptung folgt nun mit dem 5-er-Lemma.  $\square$

**3.5 Satz.** Sei  $p: F \rightarrow U$  eine Abbildung,  $V \subset U, G := p^{-1}(V)$ , sodass für jedes  $u \in V, y \in p^{-1}(u)$  und ein  $r \geq 1$  der Homomorphismus  $p_*: \pi_i(F, G, y) \rightarrow \pi_i(U, V, u)$  für  $i = r$  injektiv und für  $i = r + 1$  surjektiv ist. Ferner seien folgende Abbildungen gegeben:

$$\begin{array}{lcl} \bar{H} & : & (CCS^{r-1}, CS^{r-1}) \rightarrow (U, V) \\ h & : & (CS^{r-1}, S^{r-1}) \rightarrow (F, G) \\ d & : & (CS^{r-1}, S^{r-1}) \times I \rightarrow (U, V) \quad \text{mit } d(\langle t, z \rangle, 0) = \bar{H}\langle t, 0, z \rangle \\ & & \text{und } d(\langle t, z \rangle, 1) = p \circ h\langle t, z \rangle \end{array}$$

Dann existiert eine Abbildung  $H: (CCS^{r-1}, SS^{r-1}) \rightarrow (F, G)$  mit

$$\begin{aligned}
H\langle 0, t, z \rangle &= h\langle t, z \rangle \text{ und eine Fortsetzung} \\
D &: (CCSS^{r-1}, CSS^{r-1}) \rightarrow (U, V) \text{ der Abbildung} \\
D'' &: (CSS^{r-1}, SS^{r-1}) \rightarrow (U, V), \\
\langle \tau, t, z \rangle &\rightarrow \begin{cases} d(\langle t, z \rangle, 2\tau - 1), & 0 \leq \tau \leq \frac{1}{2} \\ p \circ H\langle 2\tau, t, z \rangle, & \frac{1}{2} \leq \tau \leq 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

*Beweis.*  $d: (CS^{r-1}, S^{r-1}) \times I \rightarrow (U, V)$  definiert eine Homotopie  $p \circ h \simeq \bar{H}|_{CS^{r-1}}: (CS^{r-1}, S^{r-1}) \rightarrow (U, V)$ . Da aber  $\bar{H}: (CCS^{r-1}, CS^{r-1}) \rightarrow (U, V)$  auf ganz  $CCS^{r-1}$  definiert ist und  $CCS^{r-1}$  zusammenziehbar ist, folgt  $p_*[h] = 0 \in \pi_r(U, V, u)$  und somit folgt nach Voraussetzung  $[h] = 0 \in \pi_r(F, G, y)$ . Nach (1.10) existiert also eine Fortsetzung  $H': (CCS^{r-1}, CS^{r-1}) \rightarrow (F, G)$  von  $h: (CS^{r-1}, S^{r-1}) \rightarrow (F, G)$ .

Definiere nun eine Abbildung  $D': (CSS^{r-1}, SS^{r-1}) \rightarrow (U, V)$  durch  $\langle \tau, t, z \rangle \rightarrow d(\langle t, z \rangle, \tau)$  und wähle eine Abbildung  $H'': (CSS^{r-1}, SS^{r-1}) \rightarrow (F, G)$  mit  $p_*[H''] = -[D']$ .

Definiere nun  $H: (CCS^{r-1}, CS^{r-1}) \rightarrow (F, G)$  durch

$$\langle \tau, t, z \rangle \rightarrow \begin{cases} H'\langle 2\tau, t, z \rangle, & 0 \leq \tau \leq \frac{1}{2} \\ H''\langle 2\tau - 1, t, z \rangle, & \frac{1}{2} \leq \tau \leq 1 \end{cases}$$

Für  $D'': (CSS^{r-1}, SS^{r-1}) \rightarrow (U, V)$  gilt dann:

$$[D''] = p_*[H] + [D'] = -[D'] + [D'] = 0$$

d.h. nach (1.10) existiert die gesuchte Fortsetzung  $D: (CCS^{r-1}, CSS^{r-1}) \rightarrow (U, V)$ .  $\square$

**3.6 Satz.** Sei eine Abbildung  $p: E \rightarrow B$  und eine Familie ausgezeichneter offener Teilmengen  $U_j, j \in J$ , von  $B$  gegeben mit

$$(i) B = \bigcup_{j \in J} U_j$$

(ii) Zu jedem  $b \in U_{j'} \cap U_{j''}$  existiert ein  $j \in J$  mit  $b \in U_j \subset U_{j'} \cap U_{j''}$

Dann ist  $p: E \rightarrow B$  eine Quasifaserung.

*Beweis.* Sei  $U \in \{U_j \mid j \in J\}$ ,  $b \in U$  und  $e \in p^{-1}(b)$ . Falls man zeigen kann, dass  $p_*: \pi_n(E, p^{-1}(U), e) \rightarrow \pi_n(B, U, b)$  für alle  $n \geq 0$  ein Isomorphismus ist, folgt der Satz aus (3.4) wegen (1).

(a) Sei  $\tilde{H}: (CCS^{n-2}, SS^{n-2}) \rightarrow (B, U)$ ,  $n \geq 2$ , ein Repräsentant eines  $\alpha \in \pi_n(B, U, b)$ .

Definiere nun folgende Abbildungen:

$$\begin{aligned}
\bar{H}: (CCS^{n-2}, CS^{n-2}) &\rightarrow (B, U), & \langle t, \tau, z \rangle &\rightarrow \tilde{H}\langle \tau, t, z \rangle \\
h: (CS^{n-2}, S^{n-2}) &\rightarrow (E, p^{-1}(U)), & \langle t, z \rangle &\rightarrow e \\
d: (CS^{n-2}, S^{n-2}) \times I &\rightarrow (B, U), & (\langle t, z \rangle, \tau) &\rightarrow \tilde{H}\langle \tau, t, z \rangle
\end{aligned}$$

$$\text{Dann gilt } d(\langle t, z \rangle, 0) = \tilde{H}\langle 0, t, z \rangle = \bar{H}\langle t, 0, z \rangle$$

$$\text{und } d(\langle t, z \rangle, 1) = \tilde{H}\langle 1, t, z \rangle = \tilde{H}(\ast) = b = p(e) = p \circ h\langle t, z \rangle$$

Somit existiert nach (3.5) eine Abbildung  $H: (CCS^{n-2}, CS^{n-2}) \rightarrow$

$(E, p^{-1}(U))$  mit  $H\langle 0, t, z \rangle = h\langle t, z \rangle$  und eine Fortsetzung

$D: (CCSS^{n-2}, CSS^{n-2}) \rightarrow (B, U)$  der Abbildung

$$D'': (CCSS^{n-2}, SS^{n-2}) \rightarrow (B, U), \quad \langle \tau, t, z \rangle \rightarrow \begin{cases} d(\langle t, z \rangle, 2\tau), & 0 \leq \tau \leq \frac{1}{2} \\ p \circ H\langle 2\tau - 1, t, z \rangle, & \frac{1}{2} \leq \tau \leq 1 \end{cases}$$

Definiere nun  $H': (CCSS^{n-2}, SS^{n-2}) \rightarrow (E, p^{-1}(U))$  durch  $H'\langle t, \tau, z \rangle := H\langle \tau, t, z \rangle$

und  $D': (CSS^{n-2}, SS^{n-2}) \times I \rightarrow (B, U)$  durch  $D'(\langle t, \tau, z \rangle, s) := D(s, t, \tau, z)$ . Dann definiert  $D': (CSS^{n-2}, SS^{n-2}) \times I \rightarrow (B, U)$  eine Homotopie  $p \circ H' \simeq \tilde{H}: (CSS^{n-2}, SS^{n-2}) \rightarrow (B, U)$ , d.h.  $p_*[H'] = [\tilde{H}] = \alpha$ , d.h.  $p_*: \pi_n(E, p^{-1}(U), e) \rightarrow \pi_n(B, U, b)$ ,  $n \geq 2$ , ist surjektiv.

- (b) Sei  $\alpha \in \pi_n(E, p^{-1}(U), e)$ ,  $n \geq 1$ , mit  $p_*(\alpha) = 0$  gegeben. Sei  $h: (CS^{n-1}, S^{n-1}) \rightarrow (E, p^{-1}(U))$  ein Repräsentant von  $\alpha$  und  $\tilde{H}: (CS^{n-1}, S^{n-1}) \rightarrow (B, U)$  definiere eine Homotopie von  $p \circ h: (CS^{n-1}, S^{n-1}) \rightarrow (B, U)$  in die konstante Abbildung. Dann existiert nach (3.5) eine Abbildung  $H: (CCS^{n-1}, CS^{n-1}) \rightarrow (E, p^{-1}(U))$  mit  $H\langle 0, t, z \rangle = h\langle t, z \rangle$  und  $H\langle 1, t, z \rangle \in p^{-1}(b) \subset p^{-1}(U)$ . Die Abbildung  $H': (CS^{n-1}, S^{n-1}) \times I \rightarrow (E, p^{-1}(U))$ ,  $(\langle t, z \rangle, \tau) \rightarrow H\langle \tau, t, z \rangle$ , definiert also eine Homotopie von  $h: (CS^{n-1}, S^{n-1}) \rightarrow (E, p^{-1}(U))$  zu einer Abbildung  $g: (CS^{n-1}, S^{n-1}) \rightarrow (E, p^{-1}(U))$  mit  $\text{Bild}(g) \subset p^{-1}(U)$ . Nach (1.29) ist  $h: (CS^{n-1}, S^{n-1}) \rightarrow (E, p^{-1}(U))$  also nullhomotop, d.h.  $p_*: \pi_n(E, p^{-1}(U), e) \rightarrow \pi_n(B, U, b)$  ist für alle  $n \geq 1$  injektiv.

Es bleibt noch zu zeigen, dass  $p_*: \pi_1(E, p^{-1}(U), e) \rightarrow \pi_1(B, U, b)$  surjektiv und  $p_*: \pi_0(E, p^{-1}(U), e) \rightarrow \pi_0(B, U, b)$  bijektiv ist. Die letzte Aussage erhält man leicht, wenn man beachtet, dass  $p: E \rightarrow B$  wegen (1) surjektiv ist.

- (c) Sei  $w: (I, 1, 0) \rightarrow (B, U, b)$  eine Repräsentant eines Elementes von  $\pi_1(B, U, b)$ . Wähle eine Zerlegung der Eins mit  $w[t_i, t_{i+1}] \subset U_{j_i}$ ,  $0 \leq i \leq k$ . Die Zerlegung kann endlich gewählt werden, da  $w(I) \subset B$  kompakt ist. Dann ist  $w(t_{i+1}) \in U_{j_i} \subset U_{j_i} \cap U_{j_{i+1}}$  wegen (2). Betrachte nun  $w|[t_i, t_{i+1}]: ([t_i, t_{i+1}], t_{i+1}, t_i) \rightarrow (U_{j_i}, U_{j_i}, w(t_i))$ . Da  $U_{j_i}$  und  $U_{j_i}$  ausgezeichnet sind ist  $p_*: \pi_1(p^{-1}(U_{j_i}), p^{-1}(U_{j_i}), e_i) \rightarrow \pi_1(U_{j_i}, U_{j_i}, w(t_i))$  bijektiv mit  $e_i \in p^{-1}(w(t_i))$ . Also existieren Abbildungen  $\bar{w}: (I, 1, 0) \rightarrow (p^{-1}(U_{j_i}), p^{-1}(U_{j_i}), e_i)$  mit  $p \circ \bar{w}_i \simeq w|[t_i, t_{i+1}]$ . da  $w(t_{i+1})$  und  $p \circ \bar{w}_i(1)$  in einer Wegzusammenhangskomponente von  $U_{j_i}$  liegen müssen und  $U_{j_i}$  ausgezeichnet ist, liegen auch  $e_{i+1}$  und  $\bar{w}_i(1)$  in einer Wegzusammenhangskomponente von  $p^{-1}(U_{j_i})$ . Wähle einen Weg  $w'_i: I \rightarrow p^{-1}(U_{j_i})$  mit  $w'_i(0) = \bar{w}_i(1)$  und  $w'_i(1) = e_{i+1}$ . Definiere nun  $\tilde{w}_i: I \rightarrow p^{-1}(U_{j_i})$  durch  $\tilde{w}_i(t) := \bar{w}_i(2t)$ ,  $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ , und  $\tilde{w}_i(t) := w'_i(2t - 1)$ ,  $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ . Durch Hintereinanderschaltung all dieser  $\tilde{w}_i: I \rightarrow p^{-1}(U_{j_i})$  erhält man einen Weg  $\tilde{w}: I \rightarrow E$  mit  $\tilde{w}(0) = e$  und  $\tilde{w}(1) \in p^{-1}(U)$ . Ferner gilt  $p \circ \tilde{w} \simeq w: I \rightarrow B$ , d.h.  $p_*: \pi_1(E, p^{-1}(U), e) \rightarrow \pi_1(B, U, b)$  ist surjektiv. □

**3.7 Satz.** Sei  $p: E \rightarrow B$  eine surjektive Abbildung,  $B'$  eine ausgezeichnete Teilmenge von  $B$  und  $E' := p^{-1}(B')$ . Ferner gebe es Homotopien  $D_t: E \rightarrow E$  und  $d_t: B \rightarrow B$ , sodass gilt:

- (a)  $D_0 = id_E: E \rightarrow E$ ,  $D_t(E') \subset E' \forall t \in I$ ,  $D_1(E) \subset E'$   
(b)  $d_0 = id_B: B \rightarrow B$ ,  $d_t(B') \subset B' \forall t \in I$ ,  $d_1(B) \subset B'$   
(c)  $p \circ D_1 = d_1 \circ p: E \rightarrow B$   
(d)  $D_{1*}: \pi_n(p^{-1}(b), e) \rightarrow \pi_n(p^{-1}(d_1(b)), D_1(e))$  ist ein Isomorphismus  $\forall n \geq 0, b \in B$  und  $e \in p^{-1}(b)$

Dann ist  $p: E \rightarrow B$  eine Quasifaserung.

*Beweis.* Da  $d_t: B \rightarrow B$  und  $D_t: E \rightarrow E$  Homotopien sind gilt wegen (i) bzw. (ii) für alle  $n \geq 0$ :

(a)  $d_{1*}: \pi_n(B, b) \rightarrow \pi_n(B', d_1(b))$  ist ein Isomorphismus.

(b)  $D_{1*}: \pi_n(E, e) \rightarrow \pi_n(E', D_1(e))$  ist ein Isomorphismus.

Wegen (iii) induziert  $D_1: E \rightarrow E$  Homomorphismen von der exakten Homotopiesequenz des Paares  $(E, p^{-1}(b))$  in die von  $(E', p^{-1}(d_1(b)))$ . Wegen (1) und (2) werden dabei die absoluten Homotopiegruppen isomorph abgebildet und somit ist nach dem *5-er-Lemma*  $D_{1*}: \pi_n(E, p^{-1}(b), e) \rightarrow \pi_n(E', p^{-1}(d_1(b)), D_1(e))$  ein Isomorphismus. Betrachte nun folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(E, p^{-1}(b), e) & \xrightarrow{D_{1*}} & \pi_n(E', p^{-1}(d_1(b)), D_1(e)) \\ \downarrow p_* & & \downarrow (p|_{E'})_* \\ \pi_n(B, b) & \xrightarrow{d_{1*}} & \pi_n(B', d_1(b)) \end{array}$$

Wegen (iii) ist es kommutativ und die waagrechten Homomorphismen sind Isomorphismen. Ferner ist der rechte senkrechte Homomorphismus ein Isomorphismus, da  $B'$  ausgezeichnet ist. Also ist auch  $p_*: \pi_n(E, p^{-1}(b), e) \rightarrow \pi_n(B, b)$  ein Isomorphismus, d.h.  $p: E \rightarrow B$  ist eine Quasifaserung.  $\square$

**3.8 Definition.**  $B_1 \subset B_2 \subset \dots$  sei eine Folge von topologischen Räumen und Inklusionen. In  $B := \bigcup_{i \geq 1} B_i$  sei folgende Topologie definiert:

$A \subset B$  offen (abgeschlossen)  $\Leftrightarrow A \cap B_i$  offen (abgeschlossen) in  $B_i \forall i \geq 1$ .

Dann heißt  $B$  *induktiver Limes* der Folge  $B_1 \subset B_2 \subset \dots$ .

**3.9 Satz.** Sei  $B := \bigcup_{i \geq 1} B_i$  *induktiver Limes* der Folge  $B_1 \subset B_2 \subset \dots$ , wobei die  $B_i, i \geq 1$ , dem 1. Trennungsaxiom genügen, d.h. 1-punktige Teilmengen sind abgeschlossen. Dann gilt:

$K \subset B$  kompakt  $\Rightarrow$  Es existiert ein  $i \geq 1$ , sodass  $K \subset B_i$  ist.

*Beweis.* Angenommen, die Aussage sei falsch. Dann existiert eine Folge  $\{x_i, i \geq 1\}, x_i \in K, x_i \notin B_i$ . Diese Folge und jede Teilfolge ist abgeschlossen in  $B$ , da in jedem  $B_i$  nur endlich viele ihrer Punkte liegen. Die Teilfolgen  $\{x_\mu, x_{\mu+1}, \dots\}, \mu = 1, 2, \dots$ , stellen daher eine Familie von abgeschlossenen Teilmengen von  $K$  dar, deren Durchschnitt leer ist, ohne dass bereits der Durchschnitt einer endlichen Teilfamilie leer wäre. Dies ist aber ein Widerspruch zur Kompaktheit von  $K$ .  $\square$

**3.10 Satz.** Sei  $p: E \rightarrow B$  eine stetige Abbildung,  $B$  der induktive Limes einer Folge  $B_1 \subset B_2 \subset \dots$ , wobei die  $B_i, i \geq 1$ , dem 1. Trennungsaxiom genügen. Falls jedes  $B_i, i \geq 1$ , ausgezeichnet ist, ist auch  $B$  ausgezeichnet.

*Beweis.* Sei  $K$  ein kompakter topologischer Raum,  $f: K \rightarrow B$  stetig. Wegen (3.9) ist dann  $\text{Bild}(f) \subset B_i$  für ein geeignetes  $i \geq 1$ . Ferner kann man das  $i$  so wählen, dass das Bild jeder stetigen Abbildung  $f: K \rightarrow E$  bereits in  $p^{-1}(B_i)$  liegt. Da bei der Bildung

der relativen Homotopiegruppen aber nur kompakte Räume, nämlich Bälle, betrachtet werden, folgt aus den nach Voraussetzung für alle  $B_i, i \geq 1$ , gültigen Isomorphismen, dass  $p_*: \pi_n(E, p^{-1}(b), e) \rightarrow \pi_n(B, b)$  ein Isomorphismus ist.  $\square$

### 3.11 Definition.

- (a) Eine Abbildung  $p: E \rightarrow B$  besitzt die *Homotopieliftungseigenschaft* (HLE) bezüglich einem topologischen Raum  $X$ , falls zu beliebigen Abbildungen  $H: X \times I \rightarrow B$  und  $h: X \rightarrow E$  mit  $p \circ h(x) = H(x, 0) \forall x \in X$  eine Abbildung  $G: X \times I \rightarrow E$  existiert, sodass  $p \circ G = H: X \times I \rightarrow B$  und  $G(x, 0) = h(x) \forall x \in X$  gilt.
- (b) Eine Abbildung  $p: E \rightarrow B$  heißt *Faserung*, falls sie die HLE bezüglich jedem topologischen Raum  $X$  besitzt.
- (c) Zwei Faserungen  $p: E \rightarrow B$  und  $p': E' \rightarrow B$  heißen *faserhomotopieäquivalent*, falls eine Homotopieäquivalenz  $f: E \rightarrow E'$  mit  $p' \circ f = p: E \rightarrow B$  existiert.

### 3.12 Satz.

- (a) Eine Faserung  $p: E \rightarrow B$  ist eine *Quasifaserung*.
- (b) Zwei faserhomotopieäquivalente Faserungen sind als *Quasifaserungen quasiäquivalent*.

*Beweis.*

- (a)  $p_*: \pi_n(E, p^{-1}(p(e)), e) \rightarrow \pi_n(B, p(e))$  ist surjektiv:  
Sei eine beliebige Abbildung  $f: (CS^{n-1}, S^{n-1}) \rightarrow (B, \{p(e)\})$ , d.h.  $[f] \in \pi_n(B, p(e))$  gegeben und  $g: S^{n-1} \rightarrow E$  durch  $g(u) := e \forall u \in S^{n-1}$  definiert. Dann ist folgendes Diagramm mit  $f': S^{n-1} \times I \rightarrow B, f'(u, t) := f\langle 1-t, u \rangle$ , wegen  $f'(u, 0) = f\langle 1, u \rangle = f(*) = p(e)$  kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{g} & E \\ \downarrow & & \downarrow p \\ S^{n-1} \times I & \xrightarrow{f'} & B \end{array}$$

Da  $p: E \rightarrow B$  eine Faserung ist existiert eine Abbildung  $g': S^{n-1} \times I \rightarrow E$  mit  $g'(u, 0) = g(u) = e$  und  $p \circ g'(u, t) = f'(u, t) \forall u \in S^{n-1}, t \in I$ . Also gilt  $p \circ g'(u, 1) = f\langle 0, u \rangle = p(e)$ .

Definiere eine Abbildung  $h: CS^{n-1} \rightarrow E$  durch  $h\langle t, u \rangle := g'(u, 1-t)$ . Dann gilt  $p \circ h\langle 0, u \rangle = p \circ g'(u, 1) = f'(u, 1) = f\langle 0, u \rangle = p(e)$ , d.h.  $h(S^{n-1}) \subset p^{-1}(p(e))$ , und  $h\langle 1, u \rangle = g'(u, 0) = g(u) = e$ .

Also ist  $[h] \in \pi_n(E, p^{-1}(p(e)), e)$  und  $p_*[h] = [f]$ .

$p_*: \pi_n(E, p^{-1}(p(e)), e) \rightarrow \pi_n(B, p(e))$  ist injektiv:

Sei eine Abbildung  $f: (CS^{n-1}, S^{n-1}) \rightarrow (E, p^{-1}(p(e)))$  mit  $p_*[f] = 0$  gegeben. Nach (1.10) existiert dann eine Abbildung  $H: C(CS^{n-1}, S^{n-1}) \rightarrow (B, p(e))$  mit  $H\langle 0, t, u \rangle = f\langle t, u \rangle \forall \langle t, u \rangle \in CS^{n-1}$ . Definiere  $H': CS^{n-1} \times I \rightarrow B$  durch  $H'\langle \langle t, u \rangle, \tau \rangle := H\langle \tau, t, u \rangle$ . Betrachte nun folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
CS^{n-1} & \xrightarrow{f} & E \\
\downarrow & & \downarrow p \\
CS^{n-1} \times I & \xrightarrow{H'} & B
\end{array}$$

Da  $p: E \rightarrow B$  eine Faserung ist existiert eine Abbildung  $G: CS^{n-1} \times I \rightarrow E$  mit  $G(\langle t, u \rangle, 0) = f\langle t, u \rangle \forall \langle t, u \rangle \in CS^{n-1}$  und  $p \circ G = H': CS^{n-1} \times I \rightarrow B$ . Ferner ist  $G(\langle t, u \rangle, 1) \in p^{-1}(p(e)) \forall \langle t, u \rangle \in CS^{n-1}$  wegen  $p \circ G(\langle t, u \rangle, 1) = H'(\langle t, u \rangle, 1) = H\langle 1, t, u \rangle = H(*) = p(e) \forall \langle t, u \rangle \in CS^{n-1}$ .

Außerdem ist  $G(CS^{n-1} \times I) \subset p^{-1}(p(e))$  wegen  $p \circ G(\langle 0, u \rangle, \tau) = H'(\langle 0, u \rangle, \tau) = H\langle \tau, 0, u \rangle = p(e)$ .  $G: CS^{n-1} \times I \rightarrow E$  definiert also eine Homotopie relativ  $S^{n-1}$  von  $f: (CS^{n-1}, S^{n-1}) \rightarrow (E, p^{-1}(p(e)))$  zu einer Abbildung, deren Bild in  $p^{-1}(p(e))$  liegt. Nach (1.30) gilt also  $[f] = 0 \in \pi_n(E, p^{-1}(p(e)), e)$ .

(b) Diese Aussage ist trivial. □

An dieser Stelle sei noch auf eine wichtige Aussage von Stasheff hingewiesen. May wies zwar darauf hin, dass der Beweis von Stasheff falsch sei, hielt die Aussage aber dennoch für richtig. Den richtigen Beweis lieferte dann Schön [?].

Sei  $p: E \rightarrow B$  eine Faserung, in der  $B$  und alle  $p^{-1}(b), b \in B$ , den Homotopietyp von CW-Komplexen besitzen. Dann ist auch  $E$  vom Homotopietyp eines CW-Komplexes.

**3.13 Definition.** Sei  $p: E \rightarrow B$  eine beliebige Abbildung. Dann sei

$$\begin{aligned}
Hur(E) &:= \{(e, w) \in E \times B^I \mid p(e) = w(0)\} \text{ und} \\
Hur(p) &: Hur(E) \rightarrow B \text{ durch } (e, w) \rightarrow w(1) \text{ definiert.}
\end{aligned}$$

**3.14 Satz.** Sei eine Abbildung  $p: E \rightarrow B$  gegeben. Dann ist

$Hur(p): Hur(E) \rightarrow B$  eine Faserung und es existiert eine Homotopieäquivalenz  $r: E \rightarrow Hur(E)$  mit  $Hur(p) \circ r = p: E \rightarrow B$ .

*Beweis.* Seien Abbildungen  $H: Y \times I \rightarrow B$  und  $h: Y \rightarrow Hur(E)$  mit  $Hur(p) \circ h(y) = H(y, 0) \forall y \in Y$  gegeben. Sei  $h' := pr_1 \circ h: Y \rightarrow E$  und  $h'' := pr_2 \circ h: Y \times I \rightarrow B^I$ . Dann gilt  $h''(y)(0) = p \circ h'(y) \forall y \in Y$ . Sei nun  $\bar{h}: Y \times I \rightarrow B^I$  durch

$$\bar{h}(y, t)(\tau) := \begin{cases} h''(y)(\frac{2\tau}{2-t}), & 0 \leq \tau \leq \frac{2-t}{2}, \quad y \in Y \\ H(y, 2\tau + t + 2), & \frac{2-t}{2} \leq \tau \leq 1, \quad y \in Y \end{cases}$$

definiert. Dann ist wegen  $\bar{h}(y, t)(0) = h''(y)(0) = p \circ h(y) \forall y \in Y$  die Abbildung  $\bar{H}: Y \times I \rightarrow Hur(E)$ , definiert durch  $\bar{H}(y, t) := (h'(y), \bar{h}(y, t))$  wohldefiniert und es gilt:

$$\begin{aligned}
\bar{H}(y, 0) &= (h'(y), \bar{h}(y, 0)) = (h'(y), h''(y)) = h(y) \quad \forall y \in Y \\
Hur(p) \circ \bar{H}(y, t) &= \bar{h}(y, t(1)) = H(y, t) \quad \forall (y, t) \in Y \times I
\end{aligned}$$

Also ist  $Hur(p): Hur(E) \rightarrow B$  eine Faserung.

Definiere  $r: E \rightarrow Hur(E)$  durch  $e \rightarrow (e, w_{p(e)})$ , wobei  $w_{p(e)}: I \rightarrow B$  durch  $t \rightarrow p(e) \forall t \in I$  definiert sei. Dann gilt

$$\begin{aligned}
Hur(p) \circ r &= p: E \rightarrow B \\
pr_1 \circ r &= id_E: E \rightarrow E.
\end{aligned}$$

Ferner definiert  $G: Hur(E) \times I \rightarrow Hur(E)$ ,  $((e, w), t) \rightarrow (e, w_{1-t})$ , wobei  $w_{1-t}: I \rightarrow B$  durch  $w_{1-t}(\tau) := w((1-t)\tau)$  definiert sei, eine Homotopie  $g_t: id_{Hur(E)} \simeq r \circ p r_1: Hur(E) \rightarrow Hur(E)$ . Also ist  $r: E \rightarrow Hur(E)$  eine Homotopieäquivalenz.  $\square$

**3.15 Satz.** *Sei eine Abbildung  $p: E \rightarrow B$  mit  $B$  wegzusammenhängend gegeben. Dann gilt:*

- (a) *Falls  $p: E \rightarrow B$  eine Faserung ist, sind alle  $p^{-1}(b), b \in B$ , vom gleichen Homotopietyp.*
- (b) *Falls  $p: E \rightarrow B$  eine Quasifaserung ist, sind alle  $p^{-1}(b), b \in B$ , vom gleichen schwachen Homotopietyp.*

*Beweis.* Der Beweis von (a) ist ziemlich lang, jedoch nicht sehr kompliziert. Deshalb verweise ich auf Satz (6.2.9) in [28].

Zum Beweis von (b) gehe man von der Quasifaserung  $p: E \rightarrow B$  zu der Faserung  $Hur(p): Hur(E) \rightarrow B$  über. Die Homotopieäquivalenz  $r: E \rightarrow Hur(E)$  aus (3.14) induziert dann Homomorphismen von der exakten Homotopiesequenz von  $p: E \rightarrow B$  in die von  $Hur(p): Hur(E) \rightarrow B$ .

Mit dem 5-er-Lemma ergibt sich dann, dass  $(r \circ p^{-1}(b))_*: \pi_n(p^{-1}(b), e) \rightarrow \pi_n(Hur(p^{-1}(b), r(e)))$  ein Isomorphismus ist. Mit (a) erhält man nun, dass alle  $p^{-1}(b), b \in B$ , vom gleichen schwachen Homotopietyp sind.  $\square$

**3.16 Definition.**

- (a) Seien zwei Abbildungen  $p: E \rightarrow B$  und  $f: X \rightarrow B$  gegeben. Dann heißt  $f^*E := \{(x, e) \in X \times E \mid f(x) = p(e)\}$  das *Faserprodukt* von  $X$  und  $E$  (bzgl.  $p: E \rightarrow B$  und  $f: X \rightarrow B$ ).
- (b) Sei  $p: E \rightarrow B$  eine Quasifaserung. Dann heißt  $f^*p: f^*E \rightarrow X, (x, e) \rightarrow x$ , die von  $f: X \rightarrow B$  *induzierte Quasifaserung*, falls sie eine ist.
- (c) Sei  $p: E \rightarrow B$  eine Faserung. Dann heißt  $f^*p: f^*E \rightarrow X, (x, e) \rightarrow x$ , die von  $f: X \rightarrow B$  *induzierte Faserung*, falls sie eine ist.

**3.17 Satz.** *Sei  $p: E \rightarrow B$  eine Quasifaserung. Dann gilt:*

- (a) *Sei ein CW-Komplex  $X$  und eine Abbildung  $f: X \rightarrow B$  gegeben. Dann ist  $f^*p: f^*E \rightarrow X$  eine Quasifaserung.*
- (b) *Sei  $B'$  ein CW-Komplex und  $p': E' \rightarrow B'$  eine Quasifaserung.  $\tilde{f}: E' \rightarrow E$  und  $f: B' \rightarrow B$  seien schwache Homotopieäquivalenzen mit  $p \circ \tilde{f} = f \circ p': E' \rightarrow B$ . Dann sind  $f^*p: f^*E \rightarrow B'$  und  $p': E' \rightarrow B'$  quasiäquivalent.*
- (c) *Sei  $p': E' \rightarrow B$  eine zu  $p: E \rightarrow B$  quasiäquivalente Quasifaserung und  $f: X \rightarrow B$  eine Abbildung, wobei  $X$  ein CW-Komplex sei. Dann sind  $f^*p: f^*E \rightarrow X$  und  $f^*p': f^*E' \rightarrow X$  quasiäquivalent.*

*Beweis.*



- (a) Wegen  $(f^*p)^{-1}(x) = \{x\} \times p^{-1}(f(x))$  sind  $(f^*p)^{-1}(x)$  und  $p^{-1}(f(x))$  offensichtlich homöomorph für beliebiges  $x \in X$ . Der Beweis erfolgt nun über die Gerüste von  $X$ :

$$\begin{aligned} \pi_i((f^*p)^{-1}(X^0), (f^*p)^{-1}(f^*p(y)), y) &\cong \pi_i(\{f^*p(y)\} \times p^{-1}(f(f^*p(y))), (f^*p)^{-1}(f^*p(y)), y) \\ &\cong \pi_i((f^*p)^{-1}(f^*p(y)), (f^*p)^{-1}(f^*p(y)), y) \\ &= 0 \\ &= \pi_i(X^0, f^*p(y)) \end{aligned}$$

Also ist  $X^0$  ausgezeichnet.

Sei nun  $X^n$  ausgezeichnet. Entferne in  $X^{n+1}$  aus dem Inneren jeder  $(n+1)$ -Zelle einen Punkt und bezeichne den entstehenden Raum mit  $U$ . Betrachte nun folgendes kommutative Diagramm, in dem die senkrechten Homomorphismen alle durch  $f^*p: f^*E \rightarrow X$  definiert seien:

$$\begin{array}{ccc} \pi_i((f^*p)^{-1}(X^n), (f^*p)^{-1}(x), y) & \xrightarrow{i'_*} & \pi_i((f^*p)^{-1}(U), (f^*p)^{-1}(x), y) \\ q'_* \downarrow & & \downarrow p \\ \pi_i(X^n, x) & \xrightarrow{i_*} & \pi_i(U, x) \end{array}$$

Darin ist der untere Homomorphismus ein Isomorphismus, da  $X^n$  ein Deformationstrekt von  $U$  ist, der linke Homomorphismus ist ebenfalls ein Isomorphismus, da  $X^n$  ausgezeichnet ist. Also ist der rechte Homomorphismus surjektiv für alle  $x \in X^n$ . Da aber jedes  $x \in U - X^n$  durch einen Weg mit  $X^n$  zu verbinden ist gilt diese Aussage für alle  $x \in U$ .

Sei nun ein  $\alpha \in \pi_i((f^*p)^{-1}(U), (f^*p)^{-1}(x), y)$  mit  $q_*(\alpha) = 0$  gegeben. Dann gilt  $\alpha = i'_* \circ (q'_*)^{-1} \circ (i_*)^{-1} \circ q_*(\alpha) = 0$ . Also ist der rechte Homomorphismus auch injektiv für alle  $x \in X^n$  und mit dem gleichen Argument wie oben für alle  $x \in U$ . Also ist  $U$  ausgezeichnet.

Da das Innere  $\dot{e}^{n+1}$  jeder  $(n+1)$ -Zelle wegzusammenhängend ist, ist auch  $f(\dot{e}^{n+1})$  wegzusammenhängend und somit existiert nach (3.15) ein Raum  $F$  und zu jedem  $b \in f(\dot{e}^{n+1})$  eine schwache Homotopieäquivalenz  $F \rightarrow p^{-1}(b)$ . Sei  $g_x: F \rightarrow (f^*p)^{-1}(x)$  folgende schwache Homotopieäquivalenz:

$$F \rightarrow p^{-1}(f(x)) \rightarrow (f^*p)^{-1}(x)$$

Dann ist  $g: \dot{e}^{n+1} \times F \rightarrow (f^*p)^{-1}(\dot{e}^{n+1}), (x, z) \rightarrow (x, g_x(z))$ , eine schwache Homotopieäquivalenz und es gilt  $f^*p \circ g = pr_1: \dot{e}^{n+1} \times F \rightarrow \dot{e}^{n+1}$ .

Da aber  $pr_1: \dot{e}^{n+1} \times F \rightarrow \dot{e}^{n+1}$  eine Quasifaserung ist sieht man sofort, dass auch  $f^*p: (f^*p)^{-1}(\dot{e}^{n+1}) \rightarrow \dot{e}^{n+1}$  eine Quasifaserung ist. Ferner sieht man, dass jede Teilmenge von  $\dot{e}^{n+1}$ , insbesondere  $U \cap \dot{e}^{n+1}$  ausgezeichnet ist. Also ist  $X^{n+1}$  nach (3.6) ausgezeichnet und wegen (3.10) ist  $f^*p: f^*E \rightarrow X$  eine Quasifaserung.

- (b) Definiere eine Abbildung  $\bar{f}: E' \rightarrow f^*E$  durch  $e' \rightarrow (p'(e'), \tilde{f}(e'))$ . Sie ist offensichtlich wohldefiniert und es gilt:

$$f^*p \circ \bar{f}(e') = f^*p(p'(e'), \tilde{f}(e')) = p'(e') \quad \forall e' \in E'$$

Da  $B'$  ein CW-Komplex sein soll, ist  $f^*p: f^*E \rightarrow B'$  wegen (a) eine Quasifaserung und es gilt:

$\bar{f}_*: \pi_i(E', p'^{-1}(p'(e')), e') \rightarrow \pi_i(f^*E, (f^*p)^{-1}(p'(e')), \bar{f}(e'))$  ist ein Isomorphismus für

alle  $i \geq 0$  und für alle  $e' \in E'$ .

Mit Hilfe des *5-er-Lemmas* erhält man dann aus den exakten Homotopiesequenzen obiger Paare, dass  $\bar{f}: E' \rightarrow f^*E$  eine schwache Homotopieäquivalenz ist.

- (c) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $g: E \rightarrow E'$  eine schwache Homotopieäquivalenz mit  $p' \circ g = p: E \rightarrow B$ . Definiere eine Abbildung  $\bar{g}: f^*E \rightarrow f^*E'$  durch  $(x, e) \rightarrow (x, g(e))$ . Aus den exakten Homotopiesequenzen von  $p: E \rightarrow B$  und  $p': E' \rightarrow B$  und dem *5-er-Lemma* folgt, dass  $g: E \rightarrow E'$  Isomorphismen zwischen den Homotopiegruppen der Fasern induziert. Da die entsprechenden Fasern einer Quasifaserung und der daraus induzierten Quasifaserung homöomorph sind, ist auch die Einschränkung von  $\bar{g}: f^*E \rightarrow f^*E'$  auf die Fasern eine schwache Homotopieäquivalenz. Wiederum folgt mit dem *5-er-Lemma* aus den exakten Homotopiesequenzen von  $f^*p: f^*E \rightarrow X$  und  $f^*p': f^*E' \rightarrow X$ , dass  $\bar{g}: f^*E \rightarrow f^*E'$  eine schwache Homotopieäquivalenz ist.

□

### 3.18 Satz.

- (a) Sei eine Faserung  $p: E \rightarrow B$  und eine Abbildung  $f: X \rightarrow B$  gegeben. Dann ist  $f^*p: f^*E \rightarrow X$  eine Faserung.
- (b) Seien zwei Faserungen  $p: E \rightarrow B$  und  $p': E' \rightarrow B'$  und Homotopieäquivalenzen  $\bar{f}: E \rightarrow E'$  und  $f: B \rightarrow B'$  mit  $p' \circ \bar{f} = f \circ p: E \rightarrow B'$  gegeben. Dann sind  $f^*p': f^*E' \rightarrow B$  und  $p: E \rightarrow B$  faserhomotopieäquivalent.
- (c) Seien zwei faserhomotopieäquivalente Faserungen  $p: E \rightarrow B$  und  $p': E' \rightarrow B$  und eine Abbildung  $f: X \rightarrow B$  gegeben. Dann sind  $f^*p: f^*E \rightarrow X$  und  $f^*p': f^*E' \rightarrow X$  faserhomotopieäquivalent.
- (d) Seien eine Faserung  $p: E \rightarrow B$  und zwei homotope Abbildungen  $f_0 \simeq f_1: X \rightarrow B$  gegeben. Dann sind  $f_0^*p: f_0^*E \rightarrow X$  und  $f_1^*p: f_1^*E \rightarrow X$  faserhomotopieäquivalent.

*Beweis.*

- (a) Seien  $H: Y \times I \rightarrow X$  und  $h: Y \rightarrow f^*E$  mit  $f^*p \circ h(y) = H(y, 0) \forall y \in Y$  gegeben. Dann gilt  $p \circ p'_E \circ h(y) = f \circ H(y, 0) \forall y \in Y$  und da  $p: E \rightarrow B$  eine Faserung ist existiert eine Abbildung  $H': Y \times I \rightarrow E$  mit  $p \circ H' = f \circ H: Y \times I \rightarrow B$  und  $H'(y, 0) = p'_E \circ h(y) \forall y \in Y$ . Definiere  $\bar{H}: Y \times I \rightarrow f^*E$  durch  $(y, t) \rightarrow (H(y, t), H'(y, t))$ . Wegen  $p \circ H' = f \circ H: Y \times I \rightarrow B$  ist diese Abbildung wohldefiniert. Ferner gilt:

$$f^*p \circ \bar{H}(y, t) = H(y, t) \forall (y, t) \in Y \times I$$

$$\bar{H}(y, 0) = (H(y, 0), H'(y, 0)) = (f^*p \circ h(y), p'_E \circ h(y)) = h(y)$$

Also ist  $f^*p: f^*E \rightarrow X$  eine Faserung.

- (b) Die Abbildungen  $\tilde{f}: E \rightarrow f^*E', e \rightarrow (p(e), \bar{f}(e))$ , und  $\tilde{f}^-: f^*E' \rightarrow E, (b, e') \rightarrow \bar{f}^-(e')$ , sind offensichtlich zueinander inverse Homotopieäquivalenzen, durch die  $f^*p': f^*E' \rightarrow B$  und  $p: E \rightarrow B$  faserhomotopieäquivalent sind.

- (c) Nach Voraussetzung existiert eine Homotopieäquivalenz  $\bar{f}: E \rightarrow E'$  mit  $p' \circ \bar{f} = p: E \rightarrow B$ . Die Abbildungen  $\tilde{f}: f^*E \rightarrow f^*E', (x, e) \rightarrow (x, \bar{f}(e))$ , und  $\tilde{f}^{-}: f^*E' \rightarrow f^*E, (x, e') \rightarrow (x, \bar{f}^{-}(e'))$ , sind zueinander inverse Homotopieäquivalenzen, durch die  $f^*p: f^*E \rightarrow X$  und  $f^*p': f^*E' \rightarrow X$  faserhomotopieäquivalent sind.
- (d) Sei  $F: X \times I \rightarrow B$  eine Abbildung, die die Homotopie  $f_0 \simeq f_1: X \rightarrow B$  definiert. Da  $p: E \rightarrow B$  eine Faserung ist existieren Abbildungen  $F'_i: f_i^*E \times I \rightarrow E, i=0,1$ , sodass gilt:

$$p \circ F'_i = F \circ (f_i^*p \times id_I): f_i^*E \times I \rightarrow B, i=0,1$$

$$F'_i|_{f_i^*E \times \{i\}} = pr_E^i: f_i^*E \times \{i\} \rightarrow E, i=0,1$$

Definiere nun eine Abbildung  $g_1: f_1^*E \rightarrow f_0^*E$  durch  $(x, e) \rightarrow (x, F'_1(x, e, 0))$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} p \circ F'_0 \circ (g_1 \times id_I) &= F \circ (f_0^*p \times id_I) \circ (g_1 \times id_I) \\ &= F \circ (f_1^*p \times id_I): f_1^*E \times I \rightarrow B \\ F'_0 \circ (g_1 \times id_I)|_{f_1^*E \times \{0\}} &= F'_1|_{f_1^*E \times \{0\}}: f_1^*E \times \{0\} \rightarrow E \end{aligned}$$

Sei nun  $A := I \times \{0\} \cup \{0\} \times I \cup I \times \{1\} \subset I \times I$  und definiere  $f: f_1^*E \times A \rightarrow E$  durch

$$\begin{aligned} f(y, t, 0) &:= F'_1(y, t), \\ f(y, 0, t) &:= F'_1(y, 0), \quad y \in f_1^*E. \\ f(y, t, 1) &:= F'_0 \circ (g_1 \times id_I)(y, t), \end{aligned}$$

Mit  $H: f_1^*E \times I \times I \rightarrow B, (y, t_1, t_2) \rightarrow F \circ (f_1^*p \times id_I)(y, t_1)$ , gilt dann  $H|_{f_1^*E \times A} = p \circ f: f_1^*E \times A \rightarrow B$ . Da ein Homöomorphismus  $I \times I \rightarrow I \times I$  existiert, der  $A$  auf  $I \times \{0\}$  abbildet existiert ein Homöomorphismus  $f_1^*E \times I \times I \rightarrow f_1^*E \times I \times I$ , der  $f_1^*E \times A$  auf  $f_1^*E \times I \times \{0\}$  abbildet. Da  $p: E \rightarrow B$  eine Faserung ist, existiert somit eine Abbildung  $H': f_1^*E \times I \times I \rightarrow E$  mit  $H'|_{f_1^*E \times A} = f: f_1^*E \times A \rightarrow E$  und  $p \circ H' = H: f_1^*E \times I \times I \rightarrow B$ . Also definiert  $H': f_1^*E \times I \times I \rightarrow E$  eine faserentreue Homotopie  $f'_1 \simeq f'_0 \circ (g_1 \times id_I): f_1^*E \times I \rightarrow E$ , d.h.  $H'(x, e, t, 0) \in p^{-1}(b) \Rightarrow H'(x, e, t, \tau) \in p^{-1}(b), 0 \leq \tau \leq 1$ .

$$\begin{aligned} \text{Wegen } g_0 \circ g_1(x, e) &= (x, F'_0(x, F'_1(x, e, 0), 1)) \\ &= (pr_X, F'_0 \circ (g_1 \times id_I))(x, e, 1) \\ &= (pr_X, F'_0 \circ (g_1 \times id_I)) \circ j(x, e), \end{aligned}$$

wobei  $j: f_1^*E \rightarrow f_1^*E \times \{1\}$  durch  $(x, e) \rightarrow (x, e, 1)$  definiert sei, gilt nun:

$$\begin{aligned} g_0 \circ g_1 &= (pr_X, F'_0 \circ (g_1 \times id_I)) \circ j \\ &\simeq (pr_X, F'_1) \circ j \\ &= (pr_X, F'_1|_{f_1^*E \times \{1\}}) \circ j \\ &= (pr_X, pr_E^1) \circ j \\ &= id_{f_1^*E}: f_1^*E \rightarrow f_1^*E. \end{aligned}$$

Analog erhält man  $g_1 \circ g_0 \simeq id_{f_0^*E}: f_0^*E \rightarrow f_0^*E$ .  $g_0: f_0^*E \rightarrow f_1^*E$  und  $g_1: f_1^*E \rightarrow f_0^*E$  sind also zueinander inverse Homotopieäquivalenzen, durch die  $f_0^*p: f_0^*E \rightarrow X$  und  $f_1^*p: f_1^*E \rightarrow X$  faserhomotopieäquivalent werden.

□

**3.19 Satz.** Sei ein CW-Komplex  $X$ , eine Abbildung  $f: X \rightarrow B$  und eine Quasifaserung  $p: E \rightarrow B$  gegeben. Dann sind  $Hur(f^*p): Hur(f^*E) \rightarrow X$  und  $f^*Hur(p): f^*Hur(E) \rightarrow X$  faserhomotopieäquivalent.

*Beweis.* Nach (3.14) existieren Homotopieäquivalenzen  $r: f^*E \rightarrow Hur(f^*E)$  und  $s: E \rightarrow Hur(E)$  mit  $Hur(f^*p) \circ r = f^*p: f^*E \rightarrow X$  bzw.  $Hur(p) \circ s = p: E \rightarrow B$ . Analog

zu (3.18(c)) erhält man dann eine Homotopieäquivalenz  $\bar{s}: f^*E \rightarrow f^*Hur(E)$  mit  $f^*Hur(p) \circ \bar{s} = f^*p: f^*E \rightarrow X$ . Also wird durch  $\bar{s} \circ r^-: Hur(f^*E) \rightarrow f^*Hur(E)$  die gesuchte Faserhomotopieäquivalenz definiert.  $\square$

### 3.20 Definition.

(a) Eine Quasifaserung  $p: E \rightarrow B$  heißt *Prinzipal-M-Quasifaserung*, falls ein assoziativer topologischer Monoid  $(M, \mu)$  mit neutralem Element  $1_M$  und eine Abbildung  $\nu: E \times M \rightarrow E$  existieren, sodass gilt:

- (i)  $\nu(e, 1_M) = e \quad \forall e \in E$
- (ii)  $p(\nu(e, m)) = p(e) \quad \forall (e, m) \in E \times M$
- (iii)  $\nu(\nu(e, m), m') = \nu(e, \mu(m, m')) \quad \forall (e, m, m') \in E \times M \times M$
- (iv)  $\nu(e, \cdot): M \rightarrow p^{-1}(p(e)), m \rightarrow \nu(e, m)$ , ist eine schwache Homotopieäquivalenz  $\forall e \in E$

$\nu: E \times M \rightarrow E$  heißt *Operation* von  $M$  auf  $E$ .

(b) Zwei Prinzipal-M-Quasifaserungen  $p: E \rightarrow B$  und  $p': E' \rightarrow B'$  mit Operationen  $\nu: E \times M \rightarrow E$  bzw.  $\nu': E' \times M \rightarrow E'$  heißen *schwach strukturäquivalent*, falls schwache Homotopieäquivalenzen  $\bar{f}: E \rightarrow E'$  und  $f: B \rightarrow B'$  mit  $p' \circ \bar{f} = f \circ p: E \rightarrow B'$  und  $\bar{f} \circ \nu = \nu' \circ (\bar{f} \times id_M): E \times M \rightarrow E'$  existieren.

(c) Zwei Prinzipal-M-Quasifaserungen  $p: E \rightarrow B$  und  $p': E' \rightarrow B'$  mit Operationen  $\nu: E \times M \rightarrow E$  bzw.  $\nu': E' \times M \rightarrow E'$  heißen *strukturäquivalent*, falls Prinzipal-M-Quasifaserungen  $p_i: E_i \rightarrow B, i = 1, \dots, n$ , mit Operationen  $\nu_i: E_i \times M \rightarrow E_i$  existieren, sodass gilt:

- (i)  $E_1 = E, p_1 = p: E \rightarrow B, \nu_1 = \nu: E \times M \rightarrow E$   
 $E_n = E', p_n = p': E' \rightarrow B, \nu_n = \nu': E' \times M \rightarrow E'$
- (ii) Zu jedem  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  existiert entweder eine schwache Homotopieäquivalenz  $f_i: E_i \rightarrow E_{i+1}$  mit  $p_{i+1} \circ f_i = p_i: E_i \rightarrow B$  und  $f_i \circ \nu_i = \nu_{i+1} \circ (f_i \times id_M): E_i \times M \rightarrow E_{i+1}$  oder eine schwache Homotopieäquivalenz  $\bar{f}_i: E_{i+1} \rightarrow E_i$  mit  $p_i \circ \bar{f}_i = p_{i+1}: E_{i+1} \rightarrow B$  und  $\bar{f}_i \circ \nu_{i+1} = \nu_i \circ (\bar{f}_i \times id_M): E_{i+1} \times M \rightarrow E_i$ .

**3.21 Satz.** Sei  $p: E \rightarrow B$  eine Prinzipal-M-Quasifaserung mit Operation  $\nu: E \times M \rightarrow E$ . Dann ist  $Hur(p): Hur(E) \rightarrow B$  eine Prinzipal-M-Quasifaserung mit Operation  $Hur(\nu): Hur(E) \times M \rightarrow Hur(E), (e, w, m) \rightarrow (\nu(e, m), w)$ , die durch eine Homotopieäquivalenz  $r: E \rightarrow Hur(E)$  zu  $p: E \rightarrow B$  strukturäquivalent ist.

*Beweis.* Man prüft leicht nach, dass die Bedingungen (3.20(a) (i)-(iv)) für  $Hur(\nu): Hur(E) \times M \rightarrow Hur(E)$  erfüllt sind, da  $\nu: E \times M \rightarrow E$  sie nach Voraussetzung erfüllt.

Ebenso leicht prüft man nach, dass die Homotopieäquivalenz  $r: E \rightarrow Hur(E)$  aus (3.14) die zusätzliche Bedingung  $r(\nu(e, m)) = Hur(\nu)(r(e), m) \quad \forall (e, m) \in E \times M$  erfüllt.  $\square$

**3.22 Satz.** Sei  $p: E \rightarrow B$  eine Prinzipal-M-Quasifaserung mit Operation  $\nu: E \times M \rightarrow E$ . Dann gilt:

- (a) Sei ein CW-Komplex  $X$  und eine Abbildung  $f: X \rightarrow B$  gegeben. Dann ist  $f^*p: f^*E \rightarrow X$  eine apmqf mit Operation  $f^*\nu: f^*E \times M \rightarrow f^*E, (x, e, m) \rightarrow (x, \nu(e, m))$ .
- (b) Seien  $B'$  ein CW-Komplex und  $p': E' \rightarrow B'$  eine Prinzipal- $M$ -Quasifaserung mit Operation  $\nu': E' \times M \rightarrow E'$  und  $\bar{f}: E' \rightarrow B, f: B' \rightarrow B$  Abbildungen mit  $p \circ \bar{f} = f \circ p': E' \rightarrow B$  und  $f \circ \nu' = \nu \circ (\bar{f} \times id_M): E' \times M \rightarrow E$ . Dann sind  $f^*p: f^*E \rightarrow B'$  und  $p': E' \rightarrow B'$  strukturäquivalent.
- (c) Seien eine zu  $p: E \rightarrow B$  strukturäquivalente Prinzipal- $M$ -Quasifaserung  $p': E' \rightarrow B'$  mit Operation  $\nu': E' \times M \rightarrow E'$ , ein CW-Komplex  $X$  und eine Abbildung  $f: X \rightarrow B$  gegeben. Dann sind  $f^*p: f^*E \rightarrow X$  und  $f^*p': f^*E' \rightarrow X$  strukturäquivalent.
- (d) Seien ein CW-Komplex  $X$  und zwei homotope Abbildungen  $f_0 \simeq f_1: X \rightarrow B$  gegeben. Dann sind  $f_0^*p: f_0^*E \rightarrow X$  und  $f_1^*p: f_1^*E \rightarrow X$  strukturäquivalent.

*Beweis.* Für (a)&(c) übertragen sich die Beweise von (3.17) und die zusätzlichen Bedingungen für Prinzipal- $M$ -Quasifaserungen prüft man leicht nach.

Die Aussage (d) folgt sofort aus (3.18(d)), (3.19) und (c).

Zum Beweis der Aussage (b) definiere zunächst die Abbildung  $\tilde{f}: E' \rightarrow f^*E$  durch  $e' \rightarrow (p'(e'), \bar{f}(e'))$ . Sie ist offensichtlich wohldefiniert und es gilt:

- (i)  $f^*p \circ \tilde{f}(e') = f^*p(p'(e'), \bar{f}(e')) = p'(e') \quad \forall e' \in E'$
- (ii)  $\begin{aligned} \tilde{f} \circ \nu' &= (p' \circ \nu', \bar{f} \circ \nu') \\ &= (p' \circ p r_1, \nu \circ (\bar{f} \times id_M)) \\ &= f^*\nu \circ ((p' \circ p r_1, \bar{f}) \times id_M) \\ &= f^*\nu \circ (f \times id_M): E' \times M \rightarrow f^*E \end{aligned}$

Wegen (i) kann man  $\tilde{f}: E' \rightarrow f^*E$  auch als Abbildung  $\tilde{f}: (E', p'^{-1}(p'(e'))) \rightarrow (f^*E, (f^*p)^{-1}(p'(e')))$  auffassen und, da sowohl  $p': (E', p'^{-1}(p'(e'))) \rightarrow B'$  als auch  $f^*p: (f^*E, (f^*p)^{-1}(p'(e'))) \rightarrow B'$  Isomorphismen zwischen den Homotopiegruppen induzieren, gilt:

$\tilde{f}_*: \pi_i(E', p'^{-1}(p'(e')), e') \rightarrow \pi_i(f^*E, (f^*p)^{-1}(p'(e')), \tilde{f}(e'))$  ist  $\forall i \geq 0$  und  $\forall e' \in E'$  ein Isomorphismus.

Ebenfalls wegen (i) kann man  $\tilde{f}: E' \rightarrow f^*E$  als Abbildung  $\tilde{f}: p'^{-1}(p'(e')) \rightarrow (f^*p)^{-1}(p'(e'))$  auffassen und, da  $\tilde{f} \circ \nu'(e', \cdot) = f^*\nu(f(e'), \cdot): M \rightarrow (f^*p)^{-1}(p'(e'))$  ist, gilt auch:

$\tilde{f}_*: \pi_i(p'^{-1}(p'(e')), e') \rightarrow \pi_i((f^*p)^{-1}(p'(e')), \tilde{f}(e'))$  ist  $\forall i \geq 0$  und  $\forall e' \in E'$  ein Isomorphismus.

Mit Hilfe des 5-er-Lemmas folgt nun aus den exakten Homotopiesequenzen von  $p': E' \rightarrow B'$  und  $f^*p: f^*E \rightarrow B$ , dass  $\tilde{f}_*: \pi_i(E', e') \rightarrow \pi_i(f^*E, \tilde{f}(e')) \quad \forall i \geq 0$  und  $\forall e' \in E'$  ein Isomorphismus ist.

Also ist  $f: E' \rightarrow f^*E$  eine schwache Homotopieäquivalenz, und zusammen mit (i) und (ii) folgt, dass  $p': E' \rightarrow B'$  und  $f^*p: f^*E \rightarrow B'$  strukturäquivalent sind.  $\square$

**3.23 Satz.** Sei  $p: E \rightarrow B$  eine Prinzipal- $M$ -Quasifaserung mit Operation  $\nu: E \times M \rightarrow E$  und  $i: A \rightarrow B$  eine Inklusion, wobei  $A$  zusammenziehbar sei. Dann sind  $i^*p: i^*E \rightarrow A$  und die Prinzipal- $M$ -Quasifaserung  $pr: A \times M \rightarrow A, (a, m) \rightarrow a$ , mit Operation  $\nu': A \times M \times M \rightarrow A \times M, (a, m, m') \rightarrow (a, \mu(m, m'))$ , strukturäquivalent.

*Beweis.* Da  $i: A \rightarrow B$  eine Inklusion und  $A$  zusammenziehbar ist, sind  $i: A \rightarrow B$  und die konstante Abbildung  $c: A \rightarrow B, a \rightarrow b_0$ , homotop. Also sind nach (3.22(d))  $i^*p: i^*E \rightarrow A$  und  $c^*p: c^*E \rightarrow A$  strukturäquivalent.

Definiere nun  $\bar{f}: A \times M \rightarrow c^*E = A \times p^{-1}(b_0)$ , indem man ein  $e_0 \in p^{-1}(b_0)$  wählt und dann  $\bar{f}(a, m) := (a, \nu(e_0, m))$  setzt. Man prüft leicht nach, dass  $\bar{f}: A \times M \rightarrow c^*E$  die notwendigen Eigenschaften besitzt, sodass  $pr: A \times M \rightarrow A$  und  $c^*p: c^*E \rightarrow A$  strukturäquivalent sind, womit die Aussage des Satzes bewiesen ist.  $\square$

**3.24 Definition.** Sei  $F$  ein lokalkompakter topologischer Raum und  $p: E \rightarrow B$  eine surjektive Abbildung, sodass  $p^{-1}(b)$  und  $F$  für alle  $b \in B$  vom gleichen Homotopietyp sind.

Definiere nun  $Prin(E) := \{\psi: F \rightarrow p^{-1}(b) \mid b \in B,$

$\psi: F \rightarrow p^{-1}(b)$  ist eine Homotopieäquivalenz}

und  $Prin(p): Prin(E) \rightarrow B$  durch  $Prin(p)(\psi) := p(\psi(y)), y \in F$ .

**3.25 Satz.** Sei  $p: E \rightarrow B$  eine Faserung mit lokalkompakter Faser  $F$ , d.h. alle  $p^{-1}(b), b \in B$ , sind vom Homotopietyp eines lokalkompakten topologischen Raumes  $F$ . Dann gilt:

(a)  $Prin(p): Prin(E) \rightarrow B$  ist eine Faserung.

(b)  $Prin(p): Prin(E) \rightarrow B$  ist eine Prinzipal- $H(F)$ -Quasifaserung.

*Beweis.*

(a) Seien zwei Abbildungen  $H: X \times I \rightarrow B$  und  $h: X \rightarrow Prin(E)$  mit  $Prin(p) \circ h(x) = H(x, 0) \forall x \in X$  gegeben. Seien  $p_H: E_H \rightarrow X \times I$  bzw.  $p_0: E_0 \rightarrow X \times \{0\}$  die durch  $H: X \times I \rightarrow B$  bzw.  $H_0: X \times \{0\} \rightarrow B, (x, 0) \rightarrow H(x, 0)$ , aus  $p: E \rightarrow B$  induzierten Faserungen. Definiere nun eine Abbildung  $\bar{H}: E_H \times I \times I \rightarrow X \times I$  durch  $(x, t, e, \tau_1, \tau_2) \rightarrow (x, (1 - \tau_2)t + \tau_1\tau_2) \forall (x, t, e) \in E_H, \tau_1, \tau_2 \in I$ . Da  $p_H: E_H \rightarrow X \times I$  eine Faserung ist und  $p_H(x, t, e) = (x, t) = \bar{H}(x, t, e, \tau_1, 0) \forall (x, t, e) \in E_H, \tau_1 \in I$ , existiert eine Abbildung  $\tilde{H}: E_H \times I \times I \rightarrow E_H$  mit  $\tilde{H}(x, t, e, \tau_1, 0) = (x, t, e) \forall (x, t, e) \in E_H, \tau_1 \in I$ , und  $p_H \circ \tilde{H} = \bar{H}: E_H \times I \times I \rightarrow X \times I$ . Definiere nun Abbildungen  $Q: E_0 \times I \rightarrow E_H$  bzw.  $Q': E_H \rightarrow E_0 \times I$  durch  $(x, 0, e, t) \rightarrow \tilde{H}(x, 0, e, t, 1)$  bzw.  $(x, t, e) \rightarrow (\tilde{H}(x, t, e, 0, 1), t)$ .  $Q': E_H \rightarrow E_0 \times I$  ist wegen  $p_H \circ \tilde{H}(x, t, e, 0, 1) = \bar{H}(x, t, e, 0, 1) = (x, 0)$  und wegen  $p_H^{-1}(X \times \{0\}) = p_0^{-1}(X \times \{0\})$  wohldefiniert.

Um zu zeigen, dass  $Q: E_0 \times I \rightarrow E_H$  und  $Q': E_H \rightarrow E_0 \times I$  zueinander inverse Homotopieäquivalenzen sind, definiere die folgenden Homotopien:

$$h_s^1: Q' \simeq Q'': E_H \rightarrow E_0 \times I, \quad h_s^1(x, t, e) := (\tilde{H}(x, t, e, 0, 1), t(1 - s)),$$

wobei  $Q'': E_H \rightarrow E_0 \times I$  durch  $(x, t, e) \rightarrow (\tilde{H}(x, t, e, 0, 1), 0)$  definiert sei.

$$h_s^2: Q \simeq i \circ pr_1: E_0 \times I \rightarrow E_H, \quad h_s^2(x, 0, e, t) := \tilde{H}(x, 0, e, t, 1 - s),$$

wobei  $pr_1: E_0 \times I \rightarrow E_0$  die Projektion und  $i: E_0 \rightarrow E_H$  die Inklusion sei.

$$h_s^3: i \circ pr_1 \circ Q'' \simeq id_{E_H}: E_H \rightarrow E_H, \quad h_s^3(x, t, e) := \tilde{H}(x, t, e, 0, 1 - s)$$

$$h_s^4: Q' \circ i \circ pr_1 \simeq Q''': E_0 \times I \rightarrow E_0 \times I, \quad h_s^4(x, 0, e, t) := (\tilde{H}(x, 0, e, 0, 1 - s), 0)$$

wobei  $Q''': E_0 \times I \rightarrow E_0 \times I$  durch  $(x, 0, e, t) \rightarrow (\tilde{H}(x, 0, e, 0, 0), 0) = (x, 0, e, 0)$  definiert sei.

$$h_s^5: Q''' \simeq id_{E_0 \times I}: E_0 \times I \rightarrow E_0 \times I, \quad h_s^5(x, 0, e, t) := (x, 0, e, ts)$$

Man sieht nun leicht:

$$Q \circ Q' \simeq Q \circ Q'' \simeq i \circ pr_1 \circ Q'' \simeq id_{E_H}: E_H \rightarrow E_H$$

$$Q' \circ Q \simeq Q' \circ i \circ pr_1 \simeq Q''' \simeq id_{E_0 \times I}: E_0 \times I \rightarrow E_0 \times I$$

$$\begin{aligned} \text{Wegen } p_H \circ Q(x, 0, e, t) &= p_H \circ \tilde{H}(x, 0, e, t, 1) \\ &= \tilde{H}(x, 0, e, t, 1) \\ &= (x, t) \\ &= R(x, 0, t) \\ &= ((R \circ p_0) \times id_I)(x, 0, e, t) \end{aligned}$$

sind  $p_H: E_H \rightarrow X \times I$  und  $p_0 \times id_I: E_0 \times I \rightarrow E_0 \times \{0\} \times I$  faserhomotopieäquivalente Faserungen, wobei  $R: X \times \{0\} \rightarrow X$  der durch  $(x, 0) \rightarrow x$  definierte Homöomorphismus sei.

Definiere nun eine Abbildung  $G: X \times I \rightarrow Prin(E)$  durch  $G(x, t)(y) := g \circ Q(R^{-1}(x), h(x)(y), t)$ , wobei  $g: E_H \rightarrow E$  durch  $g(x, t, e) := e$  definiert sei. Dann gilt:

$$\begin{aligned} Prin(p) \circ G(x, t) &= p \circ g \circ Q(R^{-1}(x), h(x)(y), t) \\ &= H \circ p_H \circ Q(R^{-1}(x), h(x)(y), t) \\ &= H \circ ((R \circ p_0) \times id_I)(R^{-1}(x), h(x)(y), t) \\ &= H(R \circ p_0(R^{-1}(x), h(x)(y)), t) \\ &= H(R \circ R^{-1}(x), t) \\ &= H(x, t) \\ G(x, 0)(y) &= g \circ Q(R^{-1}(x), h(x)(y), 0) \\ &= g \circ \tilde{H}(R^{-1}(x), h(x)(y), 0) \\ &= g(R^{-1}(x), h(x)(y)) \\ &= h(x)(y) \end{aligned}$$

Also ist  $Prin(p): Prin(E) \rightarrow B$  eine Faserung.

(b) Definiere  $\nu: Prin(E) \times H(F) \rightarrow Prin(E)$  durch  $(\psi, h) \rightarrow \psi \circ h$ . Dann gilt:

$$(i) \quad \nu(\psi, id_F) = \psi \circ id_F = \psi$$

$$(ii) \quad \nu(\nu(\psi, h), h') = \nu(\psi \circ h, h') = \psi \circ h \circ h' = \nu(\psi, h \circ h') = \nu(\psi, \mu(h, h'))$$

$$(iii) \quad \text{Sei } \psi \in Prin(E) \text{ mit } p \circ \psi(y) = b. \text{ Dann gilt } p(\nu(\psi, h)(y)) = p \circ \psi \circ h(y) = b$$

(iv) Definiere  $\nu': Prin(p)^{-1}(Prin(p)(\psi)) \rightarrow H(F)$  durch  $\psi' \rightarrow \psi^- \circ \psi'$ . Dann gilt

$$\nu(\psi, \cdot) \circ \nu'(\psi') = \nu(\psi, \cdot)(\psi^- \circ \psi') = \psi \circ \psi^- \circ \psi' \simeq \psi': F \rightarrow p^{-1}(b),$$

$$\text{d.h. } \nu(\psi, \cdot) \circ \nu' \simeq id: Prin(p)^{-1}(Prin(p)(\psi)) \rightarrow Prin(p)^{-1}(Prin(p)(\psi))$$

$$\nu' \circ \nu(\psi, \cdot)(h) = \nu'(\psi \circ h) = \psi^- \circ \psi \circ h \simeq h: F \rightarrow F,$$

$$\text{d.h. } \nu' \circ \nu(\psi, \cdot) \simeq id: H(F) \rightarrow H(F)$$

Also ist  $\nu(\psi, \cdot): H(F) \rightarrow Prin(p)^{-1}(Prin(p)(\psi))$  eine Homotopieäquivalenz.

Somit ist gezeigt, dass  $Prin(p): Prin(E) \rightarrow B$  eine Prinzipal-H(F)-Quasifaserung ist. □

### 3.26 Satz.

(a) Sei ein CW-Komplex  $X$ , eine Abbildung  $f: X \rightarrow B$  und eine Faserung  $p: E \rightarrow B$  mit lokalkompakter Faser  $F$  gegeben. Dann sind  $g^*Prin(p): g^*Prin(E) \rightarrow X$  und  $Prin(g^*p): Prin(g^*p) \rightarrow X$  strukturäquivalent.

(b) Sei eine surjektive Abbildung  $p: E \rightarrow B$  und ein lokalkompakter topologischer Raum  $F$  gegeben, sodass  $F$  und  $p^{-1}(b)$  für alle  $b \in B$  vom gleichen Homotopietyp sind. Dann sind  $\text{Prin}(\text{Hur}(p)): \text{Prin}(\text{Hur}(E)) \rightarrow B$  und  $\text{Hur}(\text{Prin}(p)): \text{Hur}(\text{Prin}(E)) \rightarrow B$  strukturäquivalent.

*Beweis.*

- (a) Sei  $\psi: F \rightarrow (g^*p)^{-1}(x) = \{x\} \times p^{-1}(g(x))$  ein Element von  $\text{Prin}(g^*E)$ . Definiere  $f: \text{Prin}(g^*E) \rightarrow g^*\text{Prin}(E)$ , indem man  $\psi: F \rightarrow (g^*p)^{-1}(x)$  die Abbildung  $\bar{\psi}: F \rightarrow (g^*\text{Prin}(p))^{-1}(x), y \rightarrow (x, \psi)$ , zuordnet. Man prüft nun leicht nach, dass die beiden Prinzipal- $H(F)$ -Quasifaserungen dadurch strukturäquivalent sind.
- (b) Sei  $r: E \rightarrow \text{Hur}(E)$  die Homotopieäquivalenz aus (3.14). Dann gilt für  $\tilde{r}: \text{Prin}(E) \rightarrow \text{Prin}(\text{Hur}(E)), \psi \rightarrow r \circ \psi$ :
- (i)  $\tilde{r}: \text{Prin}(E) \rightarrow \text{Prin}(\text{Hur}(E))$  ist eine Homotopieäquivalenz.
  - (ii)  $\text{Prin}(\text{Hur}(p)) \circ \tilde{r} = \text{Prin}(p): \text{Prin}(E) \rightarrow B$
  - (iii)  $\tilde{r}(\nu(\psi, h)) = \tilde{r}(\psi \circ h) = r \circ \psi \circ h = \tilde{r}(\psi) \circ h = \nu'(\tilde{r}(\psi), h)$ ,  
wobei  $\nu: \text{Prin}(E) \times H(F) \rightarrow \text{Prin}(E)$  die Operation von  $H(F)$  auf  $\text{Prin}(E)$  und  $\nu': \text{Prin}(\text{Hur}(E)) \times H(F) \rightarrow \text{Prin}(\text{Hur}(E))$  die Operation von  $H(F)$  auf  $\text{Prin}(\text{Hur}(E))$  sei.

Mit Hilfe von (3.14) ist es nun leicht, den Beweis zu vervollständigen. □

**3.27 Definition.** Sei  $p: E \rightarrow B$  eine Prinzipal- $H(F)$ -Quasifaserung mit Operation  $\nu: E \times H(F) \rightarrow E$ , wobei  $F$  lokalkompakt sei.

- (a)  $E \hat{\times} F := E \times F \cup_{\text{id}_{E \times \eta}} E \times H(F) \times I \times F \cup_{\nu \times \text{id}_F} E \times F$ ,  
wobei  $\eta: H(F) \times F \rightarrow F$  durch  $(h, y) \rightarrow h(y)$  definiert sei.  
 $E \hat{\times} F$  habe die größte Topologie, sodass folgende Funktionen stetig sind:
- $$\begin{aligned} \hat{t}: E \hat{\times} F &\rightarrow I, & \langle e, h, t, y \rangle &\rightarrow t \\ \hat{c}: \hat{t}^{-1}(0, 1) &\rightarrow E \times H(F), & \langle e, h, t, y \rangle &\rightarrow (e, h) \\ \hat{y}: \hat{t}^{-1}(0, 1] &\rightarrow F, & \langle e, h, t, y \rangle &\rightarrow y \\ \hat{c}y: \hat{t}^{-1}[0, 1) &\rightarrow E \times F, & \langle e, h, t, y \rangle &\rightarrow (e, h(y)) \\ \hat{\nu}c: \hat{t}^{-1}(0, 1] &\rightarrow E, & \langle e, h, t, y \rangle &\rightarrow \nu(e, h) \end{aligned}$$
- (b)  $E \tilde{\times} H(F) := E \times H(F) \cup_{\text{id}_{E \times \mu}} E \times H(F) \times I \times H(F) \cup_{\nu \times \text{id}_{H(F)}} E \times H(F)$ ,  
wobei  $\mu: H(F) \times H(F) \rightarrow H(F)$  durch  $(h, h') \rightarrow h \circ h'$  definiert sei.  
 $E \tilde{\times} H(F)$  habe die größte Topologie, sodass folgende Funktionen stetig sind:
- $$\begin{aligned} \tilde{t}: E \tilde{\times} H(F) &\rightarrow I, & \langle e, h, t, h' \rangle &\rightarrow t \\ \tilde{c}: \tilde{t}^{-1}(0, 1) &\rightarrow E \times H(F), & \langle e, h, t, h' \rangle &\rightarrow (e, h) \\ \tilde{h}: \tilde{t}^{-1}(0, 1] &\rightarrow H(F), & \langle e, h, t, h' \rangle &\rightarrow h' \\ \tilde{c}h: \tilde{t}^{-1}[0, 1) &\rightarrow E \times H(F), & \langle e, h, t, h' \rangle &\rightarrow (e, h \circ h') \\ \tilde{\nu}c: \tilde{t}^{-1}(0, 1] &\rightarrow E, & \langle e, h, t, h' \rangle &\rightarrow \nu(e, h) \end{aligned}$$
- (c)  $\bar{E} := E \cup_{\text{pr}_E} E \times H(F) \times I \cup_{\nu} E$  habe die größte Topologie, sodass folgende Funktionen stetig sind:
- $$\begin{aligned} \bar{t}: \bar{E} &\rightarrow I, & \langle e, h, t \rangle &\rightarrow t \\ \bar{c}: \bar{t}^{-1}(0, 1) &\rightarrow E \times H(F), & \langle e, h, t \rangle &\rightarrow (e, h) \\ \bar{e}: \bar{t}^{-1}[0, 1) &\rightarrow E, & \langle e, h, t \rangle &\rightarrow e \\ \bar{\nu}c: \bar{t}^{-1}(0, 1] &\rightarrow E, & \langle e, h, t \rangle &\rightarrow \nu(e, h) \end{aligned}$$



**3.28 Satz.** Sei  $p: E \rightarrow B$  eine Prinzipal- $H(F)$ -Quasifaserung,  $F$  lokalkompakt, mit Operation  $\nu: E \times H(F) \rightarrow E$ . Dann ist  $\hat{p}: E \hat{\times} F \rightarrow \bar{E}, \langle e, h, t, y \rangle \rightarrow \langle e, h, t \rangle$ , eine Quasifaserung mit Faser  $F$ .

*Beweis.* Offensichtlich ist  $\hat{p}: E \hat{\times} F \rightarrow \bar{E}$  wohldefiniert und surjektiv. Die Aussage folgt nun aus (3.6), falls gezeigt werden kann, dass folgende Teilmengen von  $\bar{E}$  ausgezeichnet sind:  $U := \bar{t}^{-1}[0, 1)$ ,  $V := \bar{t}^{-1}(0, 1]$  und  $U \cap V$ .

Definiere eine Abbildung  $V \times F \rightarrow \hat{p}^{-1}(V)$  durch  $(\langle e, h, t \rangle, y) \rightarrow \langle e, h, t, y \rangle$  und eine Abbildung  $\hat{p}^{-1}(V) \rightarrow V \times F$  durch  $\langle e, h, t, y \rangle \rightarrow (\langle e, h, t \rangle, y)$ . Offensichtlich sind sie stetig und zueinander invers.

Da  $V \times F \rightarrow V$  eine Quasifaserung mit Faser  $F$  ist und die Abbildung  $V \times F \rightarrow \hat{p}^{-1}(V)$  fasertreu ist, induziert sie Isomorphismen  $\hat{p}_*: \pi_i(\hat{p}^{-1}(V), \pi_i(\hat{p}^{-1}(\hat{p}\langle e, h, t, y \rangle), \langle e, h, t, y \rangle)) \rightarrow \pi_i(V, \langle e, h, t \rangle)$ .

Also ist  $V$  und jede Teilmenge von  $V$ , insbesondere auch  $U \cap V$ , ausgezeichnet.

Definiere nun Homotopien  $D_\tau: \hat{p}^{-1}(U) \rightarrow \hat{p}^{-1}(U)$  durch  $D_\tau \langle e, h, t, y \rangle := \langle e, h, t + \tau(\frac{1}{2} - t), y \rangle$  und  $d_\tau: U \rightarrow U$  durch  $d_\tau \langle e, h, t \rangle := \langle e, h, t + \tau(\frac{1}{2} - t) \rangle$ . Dann gilt:

$$D_0 = id_{\hat{p}^{-1}(U)}: \hat{p}^{-1}(U) \rightarrow \hat{p}^{-1}(U), \quad D_\tau(\hat{p}^{-1}(\bar{t}^{-1}(\frac{1}{2}))) \subset \hat{p}^{-1}(\bar{t}^{-1}(\frac{1}{2})), \\ D_1(\hat{p}^{-1}(U)) \subset \hat{p}^{-1}(\bar{t}^{-1}(\frac{1}{2}));$$

$$d_0 = id_U: U \rightarrow U, \quad d_\tau(\bar{t}^{-1}(\frac{1}{2})) \subset \bar{t}^{-1}(\frac{1}{2}), \\ d_1(U) \subset \bar{t}^{-1}(\frac{1}{2});$$

$$\hat{p} \circ D_\tau = d_\tau \circ \hat{p}: \hat{p}^{-1}(U) \rightarrow U.$$

Da  $\hat{p}: \hat{p}^{-1}(\bar{t}^{-1}(\frac{1}{2})) \rightarrow \bar{t}^{-1}(\frac{1}{2})$  eine Quasifaserung mit Faser  $F$  ist, ist  $D_{1*}: \pi_i(\hat{p}^{-1}\langle e, h, t \rangle, \langle e, h, t, y \rangle) \rightarrow \pi_i(\hat{p}^{-1}\langle e, h, \frac{1}{2} \rangle, \langle e, h, \frac{1}{2}, y \rangle)$  für alle  $i \geq 0$  für alle  $\langle e, h, t \rangle \in U$  ein Isomorphismus.

Also ist  $U$  nach (3.7) ausgezeichnet.

Da  $\bar{E}$  wegzusammenhängend ist, ist  $\hat{p}: E \hat{\times} F \rightarrow \bar{E}$  eine Quasifaserung mit Faser  $F$ .  $\square$

**3.29 Satz.** Seien  $p: E \rightarrow B$  und  $p': E' \rightarrow B'$  zwei Prinzipal- $H(F)$ -Quasifaserungen,  $F$  lokalkompakt, mit Operationen  $\nu: E \times H(F) \rightarrow E$  bzw.  $\nu': E' \times H(F) \rightarrow E'$ . Falls eine schwache Homotopieäquivalenz  $f: E \rightarrow E'$  mit  $f(\nu(e, h)) = \nu'(f(e), h)$  existiert, sind  $\hat{p}: E \hat{\times} F \rightarrow \bar{E}$  und  $\hat{p}': E' \hat{\times} F \rightarrow \bar{E}'$  schwach quasiäquivalent.

*Beweis.* Wegen  $f(\nu(e, h)) = \nu'(f(e), h)$  induzieren  $f \times id_{H(F) \times I \times F}: E \times H(F) \times I \times F \rightarrow E' \times H(F) \times I \times F$  und  $f \times id_{H(F) \times I}: E \times H(F) \times I \rightarrow E' \times H(F) \times I$  schwache Homotopieäquivalenzen  $\hat{f}: E \hat{\times} F \rightarrow E' \hat{\times} F$  und  $\bar{f}: \bar{E} \rightarrow \bar{E}'$  und es gilt:  $\hat{p}' \circ \hat{f} = \bar{f} \circ \hat{p}: E \hat{\times} F \rightarrow \bar{E}'$ .  $\square$

**3.30 Satz.** Sei  $p: E \rightarrow B$  eine Prinzipal- $H(F)$ -Quasifaserung,  $F$  lokalkompakt, mit Operation  $\nu: E \times H(F) \rightarrow E$ . Dann ist  $\tilde{p}: E \tilde{\times} H(F) \rightarrow \bar{E}, \langle e, h, t, h' \rangle \rightarrow \langle e, h, t \rangle$ , eine Prinzipal- $H(F)$ -Quasifaserung mit Operation  $\tilde{\nu}: E \tilde{\times} H(F) \times H(F) \rightarrow E \tilde{\times} H(F), (\langle e, h, t, h' \rangle, \bar{h}) \rightarrow \langle e, h, t, h' \circ \bar{h} \rangle$ .

*Beweis.* Der Beweis, dass  $\tilde{p}: E \tilde{\times} H(F) \rightarrow \bar{E}$  eine Quasifaserung ist, erfolgt analog zu dem Beweis von (3.28).

Die Bedingungen (i)-(iii) aus (3.20(a)) prüft man leicht nach. (3.20(a)(iv)) ist ebenfalls erfüllt, da  $\mu(h, \cdot): H(F) \rightarrow H(F)$  nach (1.15) eine Homotopieäquivalenz ist.  $\square$

**3.31 Satz.** Sei  $p: E \rightarrow B$  eine Prinzipal- $H(F)$ -Quasifaserung,  $F$  lokalkompakt, mit Operation  $\nu: E \times H(F) \rightarrow E$ . Dann ist  $\bar{\alpha}: E \tilde{\times} H(F) \rightarrow E$ ,  $\langle e, h, t, h' \rangle \rightarrow \nu(e, h \circ h')$ , eine Homotopieäquivalenz und es gilt:

$$(i) \quad \bar{\alpha} \circ \tilde{\nu} = \nu \circ (\bar{\alpha} \times id_{H(F)}): E \tilde{\times} H(F) \times H(F) \rightarrow E$$

$$(ii) \quad \tilde{p}\langle e, h, t, h' \rangle = \tilde{p}\langle \bar{e}, \bar{h}, \bar{t}, \bar{h}' \rangle \Rightarrow p \circ \bar{\alpha}\langle e, h, t, h' \rangle = p \circ \bar{\alpha}\langle \bar{e}, \bar{h}, \bar{t}, \bar{h}' \rangle$$

*Beweis.* Zunächst prüft man leicht nach, dass  $\bar{\alpha}: E \tilde{\times} H(F) \rightarrow E$  wohldefiniert ist. Definiere nun eine Abbildung  $\beta: E \rightarrow E \tilde{\times} H(F)$  durch  $e \rightarrow \langle e, id_F, \frac{1}{2}, id_F \rangle$ . Dann ist  $\bar{\alpha} \circ \beta = id_E: E \rightarrow E$  und wegen  $\langle \nu(e, h \circ h'), id_F, 1, id_F \rangle = \langle e, h \circ h', 1, id_F \rangle$  und wegen  $\langle e, h \circ h', 0, id_F \rangle = \langle e, h, 0, h' \rangle$  ist  $\beta \circ \bar{\alpha} \simeq id_{E \tilde{\times} H(F)}: E \tilde{\times} H(F) \rightarrow E \tilde{\times} H(F)$ .

$$(i) \quad \begin{aligned} \bar{\alpha}(\tilde{\nu}\langle e, h, t, h' \rangle, h'') &= \bar{\alpha}\langle e, h, t, h' \circ h'' \rangle \\ &= \nu(e, h \circ h' \circ h'') \\ &= \nu(\nu(e, h \circ h'), h'') \\ &= \nu(\bar{\alpha}\langle e, h, t, h' \rangle, h'') \end{aligned}$$

$$(ii) \quad \begin{aligned} \tilde{p}\langle e, h, 0, h' \rangle = \tilde{p}\langle \bar{e}, \bar{h}, 0, \bar{h}' \rangle &\Leftrightarrow e = \bar{e} \\ \Rightarrow p \circ \bar{\alpha}\langle e, h, 0, h' \rangle &= p(\nu(e, h \circ h')) \\ &= p(e) \\ &= p(\bar{e}) \\ &= p(\nu(\bar{e}, \bar{h} \circ \bar{h}')) \\ &= p \circ \bar{\alpha}\langle \bar{e}, \bar{h}, 0, \bar{h}' \rangle \\ \tilde{p}\langle e, h, t, h' \rangle = \tilde{p}\langle \bar{e}, \bar{h}, t, \bar{h}' \rangle, 0 < t < 1 &\Leftrightarrow e = \bar{e} \text{ und } h = \bar{h} \\ \Rightarrow p \circ \bar{\alpha}\langle e, h, t, h' \rangle &= p(\nu(e, h \circ h')) \\ &= p(e) \\ &= p(\bar{e}) \\ &= p(\nu(\bar{e}, \bar{h} \circ \bar{h}')) \\ &= p \circ \bar{\alpha}\langle \bar{e}, \bar{h}, t, \bar{h}' \rangle \\ \tilde{p}\langle e, h, 1, h' \rangle = \tilde{p}\langle \bar{e}, \bar{h}, 1, \bar{h}' \rangle &\Leftrightarrow \nu(e, h) = \nu(\bar{e}, \bar{h}) \text{ und } h' = \bar{h}' \\ \Rightarrow p \circ \bar{\alpha}\langle e, h, 1, h' \rangle &= p(\nu(e, h \circ h')) \\ &= p(\nu(\nu(e, h), h')) \\ &= p(\nu(e, h)) \\ &= p(\nu(\bar{e}, \bar{h})) \\ &= p(\nu(\nu(\bar{e}, \bar{h}), \bar{h}')) \\ &= p(\nu(\bar{e}, \bar{h} \circ \bar{h}')) \\ &= p \circ \bar{\alpha}\langle \bar{e}, \bar{h}, 1, \bar{h}' \rangle \end{aligned}$$

Wegen  $\tilde{p}\langle e, h, t, h' \rangle \neq \tilde{p}\langle \bar{e}, \bar{h}, \bar{t}, \bar{h}' \rangle$ , falls  $t \neq \bar{t}$ , gilt somit auch diese Aussage.  $\square$

**3.32 Definition.**  $\alpha: \bar{E} \rightarrow B$  sei die durch  $\bar{\alpha}: E \tilde{\times} H(F) \rightarrow E$  induzierte Abbildung.

**3.33 Satz.**  $\alpha: \bar{E} \rightarrow B$  ist eine schwache Homotopieäquivalenz.

*Beweis.* Die Aussage folgt aus dem 5-er-Lemma und den exakten Homotopiesequenzen von  $p: E \rightarrow B$  und  $\tilde{p}: E \tilde{\times} H(F) \rightarrow \bar{E}$ .  $\square$

**3.34 Definition.** Sei  $B$  ein CW-Komplex und  $p: E \rightarrow B$  eine Prinzipal- $H(F)$ -Quasifaserung,  $F$  lokalkompakt, mit Operation  $\nu: E \times H(F) \rightarrow E$ . Sei  $\alpha: \bar{E} \rightarrow B$  die schwache Homotopieäquivalenz von (3.32). Wegen (2.16) ist  $\alpha_*: [B, \bar{E}] \rightarrow [B, B]$  bijektiv und  $g: B \rightarrow \bar{E}$  sei ein Repräsentant von  $\gamma := \alpha_*^{-1}[id_B]$ .

Definiere  $Ass(E) := g^* Hur(E \hat{\times} F)$   
und  $Ass(p) := g^* Hur(\hat{p}): Ass(E) \rightarrow B$ .

**3.35 Satz.** Sei  $B$  ein CW-Komplex und  $p: E \rightarrow B$  eine Prinzipal- $H(F)$ -Quasifaserung,  $F$  lokalkompakt, mit Operation  $\nu: E \times H(F) \rightarrow E$ . Dann ist  $Ass(p): Ass(E) \rightarrow B$  eine Faserung mit Faser  $F$ .

*Beweis.* Nach (3.28) ist  $\hat{p}: E \hat{\times} F \rightarrow \bar{E}$  eine Quasifaserung mit Faser  $F$ . Aus dem Beweis geht sogar hervor, dass  $\hat{p}^{-1}(\bar{t}^{-1}(\frac{1}{2}))$  und  $F$  vom gleichen Homotopietyp sind. Da  $\bar{E}$  wegzusammenhängend ist, ist  $Hur(\hat{p}): Hur(E \hat{\times} F) \rightarrow \bar{E}$  eine Faserung mit Faser  $F$ , denn  $Hur(\hat{p})^{-1}\langle e, h, t \rangle$  und  $\hat{p}^{-1}\langle e, h, t \rangle$  sind vom gleichen Homotopietyp. Somit ist auch  $g^* Hur(\hat{p}): g^* Hur(E \hat{\times} F) \rightarrow B$  eine Faserung mit Faser  $F$ , womit die Aussage bewiesen ist.  $\square$

**3.36 Satz.** Seien  $p: E \rightarrow B$  und  $p': E' \rightarrow B$  zwei strukturäquivalente Prinzipal- $H(F)$ -Quasifaserungen,  $F$  lokalkompakt,  $B$  ein CW-Komplex, mit Operationen  $\nu: E \times H(F) \rightarrow E$  bzw  $\nu': E' \times H(F) \rightarrow E'$ .

Falls  $F$  ein CW-Komplex ist, sind  $Ass(p): Ass(E) \rightarrow B$  und  $Ass(p'): Ass(E') \rightarrow B$  faserhomotopieäquivalent.

*Beweis.* Nach (3.29) existieren schwache Homotopieäquivalenzen  $\hat{h}: E \hat{\times} F \rightarrow E' \hat{\times} F$  und  $\bar{h}: \bar{E} \rightarrow \bar{E}'$  mit  $\hat{p}' \circ \hat{h} = \bar{h} \circ \hat{p}: E \hat{\times} F \rightarrow \bar{E}'$ . Ferner prüft man leicht nach, dass  $\alpha' \circ \bar{h} = \alpha: \bar{E} \rightarrow B$  ist. Also gilt:

$$\begin{aligned} [g] &= \alpha_*^{-1}[id_B] = (\alpha' \circ \bar{h})_*^{-1}[id_B] = \bar{h}_*^{-1}(\alpha'_*^{-1}[id_B]) = \bar{h}_*^{-1}[g'], \\ d.h. [\bar{h} \circ g] &= \bar{h}_*[g] = \bar{h}_*(\bar{h}_*^{-1}[g']) = [g']. \end{aligned}$$

Also sind nach (3.18(d))  $Ass(p'): Ass(E') \rightarrow B$  und  $g^* \bar{h}^* Hur(\hat{p}'): g^* \bar{h}^* Hur(E' \hat{\times} F) \rightarrow g^* \bar{h}^* \bar{E}'$  faserhomotopieäquivalent. Letztere ist aber wegen (3.19) faserhomotopieäquivalent zu  $Hur(g^* \bar{h}^* \hat{p}'): Hur(g^* \bar{h}^*(E' \hat{\times} F)) \rightarrow g^* \bar{h}^* \bar{E}'$ .

Da  $\bar{h}^* \hat{p}': \bar{h}^*(E' \hat{\times} F) \rightarrow \bar{E}$  und  $\hat{p}: E \hat{\times} F \rightarrow \bar{E}$  nach (3.17(b)) quasiäquivalent sind, sind  $g^* \bar{h}^* \hat{p}': g^* \bar{h}^*(E' \hat{\times} F) \rightarrow B$  und  $g^* \hat{p}: g^*(E \hat{\times} F) \rightarrow B$  quasiäquivalent und somit sind auch  $Hur(g^* \bar{h}^* \hat{p}'): Hur(g^* \bar{h}^*(E' \hat{\times} F)) \rightarrow B$  und  $Ass(p): Ass(E) \rightarrow B$  quasiäquivalent.

Also sind  $Ass(p): Ass(E) \rightarrow B$  und  $Ass(p'): Ass(E') \rightarrow B$  quasiäquivalent und wegen eines Satzes von Stasheff (s.S. 34) sogar faserhomotopieäquivalent.  $\square$

**3.37 Satz.** Sei  $p: E \rightarrow B$  eine Prinzipal- $H(F)$ -Quasifaserung,  $B$  ein CW-Komplex,  $F$  ein lokalkompakter CW-Komplex, mit Operation  $\nu: E \times H(F) \rightarrow E$ . Dann gilt:

- (a)  $\tilde{p}: E \tilde{\times} H(F) \rightarrow \bar{E}$  und  $Prin(\hat{p}): Prin(E \hat{\times} F) \rightarrow \bar{E}$  sind strukturäquivalent.
- (b)  $Prin(Ass(p)): Prin(Ass(E)) \rightarrow B$  und  $p: E \rightarrow B$  sind strukturäquivalent.

*Beweis.*

- (a) Definiere eine Abbildung  $f: E \tilde{\times} H(F) \rightarrow Prin(E \hat{\times} F)$ , indem man jedem Element  $\langle e, h, t, h' \rangle$  von  $E \tilde{\times} H(F)$  die Abbildung  $\psi: F \rightarrow E \hat{\times} F$ ,  $\psi(y) := \langle e, h, t, h'(y) \rangle$ , zuordnet. Diese Abbildung ist stetig, da  $F$  lokalkompakt ist und die adjungierte Abbildung

$E \tilde{\times} H(F) \times F \rightarrow E \hat{\times} F, (\langle e, h, t, h' \rangle, y) \rightarrow \langle e, h, t, h'(y) \rangle$ , stetig ist.

Offensichtlich gilt  $Prin(\hat{p}) \circ f = \tilde{p}: E \hat{\times} H(F) \rightarrow \bar{E}$

und  $f(\tilde{\nu}(\langle e, h, t, h' \rangle, h'')) = \tilde{\nu}(f(\langle e, h, t, h' \rangle, h''))$ .

Wegen  $Prin(\hat{p})^{-1}\langle e, h, \frac{1}{2} \rangle \approx \{\psi: F \rightarrow \langle e, h, \frac{1}{2} \rangle \times F \mid \psi \text{ ist eine Homotopieäquivalenz}\} \approx H(F)$  ist  $f|\tilde{p}^{-1}\langle e, h, \frac{1}{2} \rangle: \tilde{p}^{-1}\langle e, h, \frac{1}{2} \rangle \rightarrow Prin(\hat{p})^{-1}\langle e, h, \frac{1}{2} \rangle$  ein Homöomorphismus.

Somit ist  $f|\tilde{p}^{-1}(\bar{e}): \tilde{p}^{-1}(\bar{e}) \rightarrow Prin(\hat{p})^{-1}(\bar{e}) \forall \bar{e} \in \bar{E}$  eine schwache Homotopieäquivalenz, denn  $\bar{E}$  ist wegzusammenhängend, d.h. in beiden Prinzipal- $H(F)$ -Quasifaserungen sind alle Fasern vom gleichen schwachen Homotopietyp.

Mit dem 5-er-Lemma folgt nun aus den exakten Homotopiesequenzen von  $\tilde{p}: E \tilde{\times} H(F) \rightarrow \bar{E}$  und  $Prin(\hat{p}): Prin(E \hat{\times} F) \rightarrow \bar{E}$  die Aussage.

- (b) (3.26)  $\Rightarrow Prin(Ass(p)): Prin(Ass(E)) \rightarrow B$   
 und  $g^*Hur(Prin(\hat{p})): g^*Hur(Prin(E \hat{\times} F)) \rightarrow B$  sind strukturäquivalent.  
 (3.37(a))  $\Rightarrow g^*Hur(Prin(\hat{p})): g^*Hur(Prin(E \hat{\times} F)) \rightarrow B$   
 und  $g^*Hur(\tilde{p}): g^*Hur(E \tilde{\times} H(F)) \rightarrow B$  sind strukturäquivalent.  
 (3.19)  $\Rightarrow g^*Hur(\tilde{p}): g^*Hur(E \tilde{\times} H(F)) \rightarrow B$   
 und  $Hur(g^*\tilde{p}): Hur(g^*(E \tilde{\times} H(F))) \rightarrow B$  sind strukturäquivalent.  
 (3.22) & (3.32)  $\Rightarrow Hur(g^*\tilde{p}): Hur(g^*(E \tilde{\times} H(F))) \rightarrow B$   
 und  $Hur(g^*\alpha^*p): Hur(g^*\alpha^*E) \rightarrow B$  sind strukturäquivalent.  
 (3.22) &  $[\alpha \circ g] = [id_B] \Rightarrow Hur(g^*\alpha^*p): Hur(g^*\alpha^*E) \rightarrow B$   
 und  $Hur(p): Hur(E) \rightarrow B$  sind strukturäquivalent.  
 (3.21)  $\Rightarrow Hur(p): Hur(E) \rightarrow B$  und  $p: E \rightarrow B$  sind strukturäquivalent.

□

**3.38 Satz.** Sei  $p: E \rightarrow B$  eine Faserung mit lokalkompaktem CW-Komplex  $F$  als Faser,  $B$  ein CW-Komplex. Dann sind  $Ass(Prin(p)): Ass(Prin(E)) \rightarrow B$  und  $p: E \rightarrow B$  faserhomotopieäquivalent.

*Beweis.* Wegen der Kommutativität des folgenden Diagramms

$$\begin{array}{ccc} \langle \psi, h, t, h' \rangle & \longrightarrow & \nu(\psi, h \circ h') \\ Prin(E) \tilde{\times} H(F) & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & Prin(E) \\ \downarrow Prin(p) \sim & & \downarrow Prin(p) \\ \overline{Prin(E)} & \xrightarrow{\alpha} & B \end{array}$$

kommutiert auch das nächste Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \langle \psi, h, t, y \rangle & \longrightarrow & \psi \circ h(y) \\ Prin(E) \hat{\times} F & \xrightarrow{\beta} & E \\ \downarrow Prin(p)^\wedge & & \downarrow p \\ \overline{Prin(E)} & \xrightarrow{\alpha} & B \end{array}$$

Betrachte nun folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
g^*(Prin(E) \hat{\times} F) & \xrightarrow{pr} & Prin(E) \hat{\times} F & \xrightarrow{\beta} & E \\
\downarrow g^* Prin(p)^\wedge & & \downarrow Prin(p)^\wedge & & \downarrow p \\
B & \xrightarrow{g} & \overline{Prin(E)} & \xrightarrow{\alpha} & B
\end{array}$$

Darin ist  $pr|(g^*Prin(p)^\wedge)^{-1}(b): (g^*Prin(p)^\wedge)^{-1}(b) \rightarrow (Prin(p)^\wedge)^{-1}(g(b))$  ein Homöomorphismus und  $\beta|Prin(p)^\wedge)^{-1}\langle\psi, h, t\rangle: Prin(p)^\wedge)^{-1}\langle\psi, h, t\rangle \rightarrow p^{-1}(\alpha\langle\psi, h, t\rangle)$  eine Homotopieäquivalenz, da  $Prin(p)^\wedge)^{-1}\langle\psi, h, t\rangle$  und  $\langle\psi, h, t\rangle \times F$  vom gleichen Homotopietyp sind und  $\psi \circ h: \langle\psi, h, t\rangle \times F \rightarrow p^{-1}(\alpha\langle\psi, h, t\rangle)$ ,  $(\langle\psi, h, t\rangle, y) \rightarrow \psi \circ h(y)$ , eine Homotopieäquivalenz ist. Mit dem *5-er-Lemma* folgt nun aus den exakten Homotopiesequenzen von  $g^*(Prin(p)^\wedge): g^*(Prin(E) \hat{\times} F) \rightarrow B$  und  $p: E \rightarrow B$ , dass  $\beta \circ pr: g^*(Prin(E) \hat{\times} F) \rightarrow E$  eine schwache Homotopieäquivalenz ist. Wegen des Satzes von Stasheff (s.S. 34) haben aber  $E$  und  $g^*(Prin(E) \hat{\times} F)$  den Homotopietyp von CW-Komplexen und somit ist wegen (2.17)  $\beta \circ pr: g^*(Prin(E) \hat{\times} F) \rightarrow E$  eine Homotopieäquivalenz, d.h.  $Ass(Prin(p)): Ass(Prin(E)) \rightarrow B$  und  $p: E \rightarrow B$  sind faserhomotopieäquivalent.  $\square$

**3.39 Korollar.** Sei  $LF(B)$  die Menge der Faserhomotopieäquivalenzklassen von Faserungen über  $B$  mit lokalkompaktem CW-Komplex  $F$  als Faser und  $QF(B)$  die Menge der Strukturäquivalenzklassen von Prinzipal- $H(F)$ -Quasifaserungen über  $B$ . Falls  $B$  ein CW-Komplex ist existiert eine Bijektion zwischen  $LF(B)$  und  $QF(B)$ .

*Beweis.* Sei  $Prin: LF(B) \rightarrow QF(B)$  dadurch definiert, dass man jeder Faserung  $p: E \rightarrow B$  die Prinzipal- $H(F)$ -Quasifaserung  $Prin(p): Prin(E) \rightarrow B$  zuordnet, und  $Ass: QF(B) \rightarrow LF(B)$  dadurch, dass man jeder Prinzipal- $H(F)$ -Quasifaserung  $q: D \rightarrow A$  die Faserung  $Ass(q): Ass(D) \rightarrow A$  zuordnet.

Seien  $p: E \rightarrow B$  und  $p': E' \rightarrow B$  zwei faserhomotopieäquivalente Faserungen, d.h. es existiert eine Homotopieäquivalenz  $g: E \rightarrow E'$  mit  $p' \circ g = p: E \rightarrow B$ . Definiere nun  $\bar{g}: Prin(E) \rightarrow Prin(E')$ , indem jedem  $\psi: F \rightarrow p^{-1}(b)$  die Homotopieäquivalenz  $g \circ \psi: F \rightarrow p'^{-1}(b)$  zugeordnet wird. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
Prin(p') \circ \bar{g}(\psi) &= Prin(p')(g \circ \psi) \\
&= p' \circ g \circ \psi(y) \\
&= b \\
&= p \circ \psi(y) \\
&= Prin(p)(\psi) \\
\bar{g}(\nu(\psi, h)) &= \bar{g}(\psi \circ h) \\
&= g \circ \psi \circ h \\
&= \bar{g}(\psi) \circ h \\
&= \nu'(\bar{g}(\psi), h)
\end{aligned}$$

Also sind  $Prin(p): Prin(E) \rightarrow B$  und  $Prin(p'): Prin(E') \rightarrow B$  strukturäquivalent.

Somit ist  $Prin: LF(B) \rightarrow QF(B)$  wohldefiniert und wegen (3.36) ist auch  $Ass: QF(B) \rightarrow LF(B)$  wohldefiniert. Wegen (3.37(b)) und (3.38) sind sie zueinander invers und somit bijektiv.  $\square$

### 3.40 Definition.

(a) Eine Abbildung  $p: E \rightarrow B$  heißt *Fassrbündel* mit Faser  $F$  und Strukturgruppe  $G$ , falls gilt:

(i)  $G$  ist eine Untergruppe von  $Top(F)$

- (ii) Es existiert eine offene Überdeckung  $\{U_j, j \in J\}$  von  $B$  und zu jedem  $j \in J$  ein Homöomorphismus  $\phi_j: U_j \times F \rightarrow p^{-1}(U_j)$ , sodass  $p \circ \phi_j = pr_1: U_j \times F \rightarrow U_j, j \in J$ , gilt.
- (iii) Zu jedem  $(j, j') \in J \times J$  existiert eine Abbildung  $g_{jj'}: U_j \cap U_{j'} \rightarrow G$ , sodass für alle  $b \in U_j \cap U_{j'}$  und  $y \in F$  gilt:  $\phi_j^{-1} \circ \phi_{j'}(b, y) = (b, g_{jj'}(b)(y))$ .

$\{(U_j, \phi_j), j \in J\}$  heißt *Atlas* des Faserbündels.

- (b) Seien  $p: E \rightarrow B, p': E' \rightarrow B$  zwei Faserbündel mit Faser  $F$  und Strukturgruppe  $G$  und  $\bar{f}: E \rightarrow E', f: B \rightarrow B'$  zwei Abbildungen, sodass gilt:

(i)  $p' \circ \bar{f} = f \circ p: E \rightarrow B'$ .

- (ii) Es existieren Atlanten  $\{(U_j, \phi_j), j \in J\}$  und  $\{(V_k, \psi_k), k \in K\}$  von  $p: E \rightarrow B$  bzw.  $p': E' \rightarrow B'$  und zu jedem  $(j, k) \in J \times K$  eine Abbildung  $\bar{g}_{jk}: U_j \cap f^{-1}(V_k) \rightarrow G$ , sodass für alle  $b \in U_j \cap f^{-1}(V_k)$  und  $y \in F$  gilt:  
 $\psi_k^{-1} \circ \bar{f} \circ \phi_j(b, y) = (f(b), \bar{g}_{jk}(b)(y))$ .

Dann heißt  $(\bar{f}: E \rightarrow E', f: B \rightarrow B')$  *Bündel-Abbildung*.

- (c) Zwei Faserbündel  $p: E \rightarrow B$  und  $p': E' \rightarrow B'$  mit Faser  $F$  und Strukturgruppe  $G$  heißen *schwach äquivalent*, falls Homöomorphismen  $\bar{h}: E \rightarrow E'$  und  $h: B \rightarrow B'$  existieren, sodass  $(\bar{h}: E \rightarrow E', h: B \rightarrow B')$  eine Bündel-Abbildung ist.
- (d) Zwei Faserbündel  $p: E \rightarrow B$  und  $p': E' \rightarrow B$  mit Faser  $F$  und Strukturgruppe  $G$  heißen *äquivalent*, falls ein Homöomorphismus  $h: E \rightarrow E'$  existiert, sodass  $(h: E \rightarrow E', id_B: B \rightarrow B)$  eine Bündel-Abbildung ist.

**3.41 Satz.** *Ein Faserbündel mit Faser  $F$  und Strukturgruppe  $G$  ist eine Quasifaserung mit Faser  $F$ .*

*Beweis.* Sei  $\{(U_j, \phi_j), j \in J\}$  ein Atlas des Faserbündels. Die Aussage folgt nun mit (3.6), da die  $U_j, j \in J$ , und alle ihre Teilmengen ausgezeichnet sind.  $\square$

**3.42 Satz.**

- (a) *Sei eine Abbildung  $f: X \rightarrow B$  und ein Faserbündel  $p: E \rightarrow B$  mit Faser  $F$  und Strukturgruppe  $G$  gegeben. Dann ist  $f^*p: f^*E \rightarrow X$  ein Faserbündel mit Faser  $F$  und Strukturgruppe  $G$ .*
- (b) *Seien zwei Faserbündel  $p: E \rightarrow B$  und  $p': E' \rightarrow B'$  mit Faser  $F$  und Strukturgruppe  $G$  gegeben, die durch die Homöomorphismen  $\bar{h}: E \rightarrow E'$  und  $h: B \rightarrow B'$  schwach äquivalent sind. Dann sind  $h^*p': h^*E' \rightarrow B$  und  $p: E \rightarrow B$  äquivalent.*
- (c) *Seien zwei Faserbündel  $p: E \rightarrow B$  und  $p': E' \rightarrow B$  mit Faser  $F$  und Strukturgruppe  $G$ , die durch den Homöomorphismus  $r: E \rightarrow E'$  äquivalent sind, und eine Abbildung  $f: X \rightarrow B$  gegeben. Dann sind  $f^*p: f^*E \rightarrow X$  und  $f^*p': f^*E' \rightarrow X$  äquivalent.*

*Beweis.*

- (a) Sei  $\{(U_j, \phi_j), j \in J\}$  ein Atlas von  $p: E \rightarrow B$ . Setze  $V_j := f^{-1}(U_j), j \in J$ , und definiere  $\psi_j: V_j \times F \rightarrow (f^*p)^{-1}(V_j)$  durch  $(x, y) \rightarrow (x, \phi_j(f(x), y))$ . Dann gilt:

$$(i) \quad f^*p \circ \phi_j(x, y) = f^*p(x, \phi_j(f(x), y)) = x$$

(ii) Mit  $\psi'_j: (f^*p)^{-1}(V_j) \rightarrow V_j \times F, j \in J$ , definiert durch  $\psi'_j(x, e) := (x, pr_2 \circ \phi_j^{-1}(e))$ , gilt dann:

$$\begin{aligned} \psi_j \circ \psi'_j(x, e) &= \psi_j(x, pr_2 \circ \phi_j^{-1}(e)) \\ &= (x, \phi_j(f(x), pr_2 \circ \phi_j^{-1}(e))) \\ &= (x, \phi_j(pr_1 \circ \phi_j^{-1}(e), pr_2 \circ \phi_j^{-1}(e))) \\ &= (x, \phi_j \circ \phi_j^{-1}(e)) \\ &= (x, e) \\ \psi'_j \circ \psi_j(x, y) &= \psi'_j(x, \phi_j(f(x), y)) \\ &= (x, pr_2 \circ \phi_j^{-1}(\phi_j(f(x), y))) \\ &= (x, pr_2(f(x), y)) \\ &= (x, y) \end{aligned}$$

Also ist  $\psi_j: V_j \times F \rightarrow (f^*p)^{-1}(V_j)$  ein Homöomorphismus.

$$(iii) \quad \begin{aligned} \psi_j^{-1} \circ \psi_{j'}(x, y) &= \psi'_j(x, \phi_{j'}(f(x), y)) \\ &= (x, pr_2 \circ \phi_j^{-1} \circ \phi_{j'}(f(x), y)) \\ &= (x, pr_2(f(x), g_{jj'}(f(x), y))) \\ &= (x, g_{jj'}(f(x), y)) \end{aligned}$$

Also ist  $f^*p: f^*E \rightarrow X$  ein Faserbündel mit Faser  $F$  und Strukturgruppe  $G$ .

(b) Definiere  $\tilde{h}: E \rightarrow h^*E'$  durch  $e \rightarrow (p(e), \bar{h}(e))$  und  $\tilde{h}': h^*E' \rightarrow E$  durch  $(b, e') \rightarrow \bar{h}^{-1}(e')$ . Dann gilt:

$$(i) \quad \begin{aligned} \tilde{h} \circ \tilde{h}'(b, e) &= \tilde{h}(\bar{h}^{-1}(e')) \\ &= (p(\bar{h}^{-1}(e')), \bar{h}(\bar{h}^{-1}(e'))) \\ &= (h^{-1}(p'(e')), e') \\ &= (b, e') \\ \tilde{h}' \circ \tilde{h}(e) &= \tilde{h}'(p(e), \bar{h}(e)) \\ &= \bar{h}^{-1}(\bar{h}(e)) \\ &= e \end{aligned}$$

Also ist  $\tilde{h}: E \rightarrow h^*E'$  ein Homöomorphismus.

$$(ii) \quad h^*p' \circ \tilde{h}(e) = h^*p'(p(e), \bar{h}(e)) = p(e)$$

$$(iii) \quad \begin{aligned} \bar{\psi}_k^{-1} \circ \tilde{h} \circ \phi_j(b, y) &= \bar{\psi}_k^{-1}(p(\phi_j(b, y)), \bar{h}(\phi_j(b, y))) \\ &= (pr_1(b, y), pr_2 \circ \psi_k^{-1}(\bar{h}(\phi_j(b, y)))) \\ &= (b, pr_2(h(b), \bar{g}_{jk}(b)(y))) \\ &= (b, \bar{g}_{jk}(b)(y)) \end{aligned}$$

Also sind  $p: E \rightarrow B$  und  $h^*p': h^*E' \rightarrow B$  äquivalent.

(c) Der Beweis erfolgt analog zu dem von (b) mit  $\bar{r}: f^*E \rightarrow f^*E', (x, e) \rightarrow (x, r(e))$ . □

### 3.43 Definition.

(a) Eine Abbildung  $p: E \rightarrow B$  heißt *Prinzipal- $G$ -Bündel*, falls  $G$  eine Topologische Gruppe (mit Multiplikationabbildung  $\mu: G \times G \rightarrow G$ ) ist und Folgendes gilt:

(i) Es existiert eine Abbildung  $\nu: E \times G \rightarrow E$  mit  $\nu(e, 1_G) = e \quad \forall e \in E$ ,

$\nu(\nu(e, g), g') = \nu(e, \mu(g, g')) \quad \forall e \in E, g, g' \in G,$   
 $p(\nu(e, g)) = p(e) \quad \forall e \in E, g \in G,$   
 $\nu(e, \cdot): G \rightarrow p^{-1}(p(e)), g \rightarrow \nu(e, g),$  ist für alle  $e \in E$  ein Homöomorphismus.

(ii) Es existiert eine offene Überdeckung  $\{U_j, j \in J\}$  von  $B$  und zu jedem  $j \in J$  ein Homöomorphismus  $\phi_j: U_j \times G \rightarrow p^{-1}(U_j)$ , sodass  $p \circ \phi_j = pr_1: U_j \times G \rightarrow U_j$  und  $\phi_j(b, \mu(g, g')) = \nu(\phi_j(b, g), g') \quad \forall b \in U_j, g, g' \in G$  gilt.

(iii) Zu jedem  $(j, j') \in J \times J$  existiert eine Abbildung  $g_{jj'}: U_j \cap U_{j'} \rightarrow G$ , sodass für alle  $b \in U_j \cap U_{j'}$  und  $g \in G$  gilt:  $\phi_j^{-1} \circ \phi_{j'}(b, g) = (b, \mu(g_{jj'}(b), g))$ .

$\nu: E \times G \rightarrow E$  heißt *Operation* von  $G$  auf  $E$  und  $\{(U_j, \phi_j), j \in J\}$  heißt *Atlas* von  $p: E \rightarrow B$ .

(b) Seien  $p: E \rightarrow B, \quad p': E' \rightarrow B'$  zwei Prinzipal- $G$ -Bündel und  $\bar{f}: E \rightarrow E', \quad f: B \rightarrow B'$  zwei Abbildungen, sodass gilt:

(i)  $p' \circ \bar{f} = f \circ p: E \rightarrow B'$ .

(ii)  $\bar{f}(\nu(e, g)) = \nu'(\bar{f}(e), g) \quad \forall e \in E, g \in G$ .

(iii) Es existieren Atlanten  $\{(U_j, \phi_j), j \in J\}$  und  $\{(V_k, \psi_k), jk \in K\}$  von  $p: E \rightarrow B$  bzw.  $p': E' \rightarrow B'$  und zu jedem  $(j, k) \in J \times K$  eine Abbildung

$\bar{g}_{jk}: U_j \cap f^{-1}(V_k) \rightarrow G$ , sodass für alle  $b \in U_j \cap f^{-1}(V_k)$  und  $g \in G$  gilt:  
 $\psi_k^{-1} \circ \bar{f} \circ \phi_j(b, g) = (f(b), \mu(\bar{g}_{jk}(b), g))$ .

Dann heißt  $(\bar{f}: E \rightarrow E', f: B \rightarrow B')$  *Prinzipal- $G$ -Bündel-Abbildung*.

(c) Zwei Prinzipal- $G$ -Bündel  $p: E \rightarrow B$  und  $p': E' \rightarrow B'$  heißen *schwach äquivalent*, falls Homöomorphismen  $\bar{h}: E \rightarrow E'$  und  $h: B \rightarrow B'$  existieren, sodass  $(\bar{h}: E \rightarrow E', h: B \rightarrow B')$  eine Prinzipal- $G$ -Bündel-Abbildung ist.

(d) Zwei Prinzipal- $G$ -Bündel  $p: E \rightarrow B$  und  $p': E' \rightarrow B$  heißen *äquivalent*, falls ein Homöomorphismus  $h: E \rightarrow E'$  existiert, sodass  $(h: E \rightarrow E', id_B: B \rightarrow B)$  eine Prinzipal- $G$ -Bündel-Abbildung ist.

**3.44 Satz.** *Ein Prinzipal- $G$ -Bündel ist eine Prinzipal- $G$ -Quasifaserung.*

*Beweis.* Wegen (3.43(a)(i)) und (3.6) ist ein Prinzipal- $G$ -Bündel eine Quasifaserung. Wegen (3.43(a)(i)) ist es sogar eine Prinzipal- $G$ -Quasifaserung.  $\square$

**3.45 Satz.**

(a) *Sei ein Prinzipal- $G$ -Bündel  $p: E \rightarrow B$  und eine Abbildung  $f: X \rightarrow B$  gegeben. Dann ist  $f^*p: f^*E \rightarrow X$  ein Prinzipal- $G$ -Bündel.*

(b) *Seien  $p: E \rightarrow B$  und  $p': E' \rightarrow B'$  zwei Prinzipal- $G$ -Bündel und  $(\bar{f}: E \rightarrow E', f: B \rightarrow B')$  eine Prinzipal- $G$ -Bündel-Abbildung. Dann sind  $p: E \rightarrow B$  und  $f^*p': f^*E' \rightarrow B$  äquivalent.*

(c) *Seien zwei Prinzipal- $G$ -Bündel  $p: E \rightarrow B$  und  $p': E' \rightarrow B$ , die durch den Homöomorphismus  $r: E \rightarrow E'$  äquivalent sind, und eine Abbildung  $f: X \rightarrow B$  gegeben. Dann sind  $f^*p: f^*E \rightarrow X$  und  $f^*p': f^*E' \rightarrow X$  äquivalent.*

*Beweis.*



(a) und (c): Die Beweise erfolgen analog zu (3.42(a)(c)) und die Operation  $f^*\nu: f^*E \times G \rightarrow f^*E$  wird durch  $(x, e, g) \rightarrow (x, \nu(e, g))$  definiert. Die Bedingung (3.43(b)(ii)) für  $\bar{r}: f^*E \rightarrow f^*E'$  prüft man leicht nach.

(b) Für die Abbildung  $r: E \rightarrow f^*E', e \rightarrow (p(e), \bar{f}(e))$ , gilt:

$$\begin{aligned} f^*p' \circ r &= p: E \rightarrow B \text{ und} \\ r(\nu(e, g)) &= (p(\nu(e, g)), \bar{f}(\nu(e, g))) \\ &= (p(e), \nu'(\bar{f}(e), g)) \\ &= f^*\nu'(p(e), \bar{f}(e), g) \\ &= f^*\nu'(r(e), g). \end{aligned}$$

Wähle nun zu jedem  $b \in B$  ein  $e_b \in p^{-1}(b)$ . Dann gilt mit  $s: f^*E' \rightarrow E, (b, e') \rightarrow \nu(e_b, \nu'(\bar{f}(e_b), \cdot)^{-1}(e'))$ :

$$\begin{aligned} s \circ r(e) &= s(p(e), \bar{f}(e)) \\ &= \nu(e_{p(e)}, \nu'(\bar{f}(e_{p(e)}), \cdot)^{-1}(\bar{f}(e))) \\ &= \nu(\nu(e, \cdot) \circ \nu(e, \cdot)^{-1}(e_{p(e)}), \nu'(\bar{f}(e_{p(e)}), \cdot)^{-1}(\bar{f}(e))) , \\ &= \nu(e, \mu(\nu(e, \cdot)^{-1}(e_{p(e)}), \nu'(\bar{f}(e_{p(e)}), \cdot)^{-1}(\bar{f}(e)))) \\ &= e \end{aligned}$$

denn es gilt:

$$\begin{aligned} \nu(e, \cdot)^{-1}(e_{p(e)}) = g &\Rightarrow e_{p(e)} &= \nu(e, g) \\ &\Rightarrow \nu'(\bar{f}(e_{p(e)}), g^{-1}) &= \nu'(\bar{f}(\nu(e, g), g^{-1})) \\ & &= \nu'(\nu'(\bar{f}(e), g), g^{-1}) \\ & &= \bar{f}(e) \\ &\Rightarrow \nu'(\bar{f}(e_{p(e)}), \cdot)^{-1}(\bar{f}(e)) &= \nu'(\bar{f}(e_{p(e)}), \cdot)^{-1}(\nu'(\bar{f}(e_{p(e)}), g^{-1})) \\ & &= \nu'(\bar{f}(e_{p(e)}), \cdot)^{-1} \circ \nu'(\bar{f}(e_{p(e)}), \cdot)(g^{-1}) \\ & &= g^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r \circ s(b, e') &= r(\nu(e_b, \nu'(\bar{f}(e_b), \cdot)^{-1}(e'))) \\ &= (p(\nu(e_b, \nu'(\bar{f}(e_b), \cdot)^{-1}(e')), \bar{f}(\nu(e_b, \nu'(\bar{f}(e_b), \cdot)^{-1}(e')))) \\ &= (p(e_b), \nu'(\bar{f}(e_b), \nu'(\bar{f}(e_b), \cdot)^{-1}(e')))) \\ &= (b, \nu'(\bar{f}(e_b), \cdot) \circ \nu'(\bar{f}(e_b), \cdot)^{-1}(e')) \\ &= (b, e') \end{aligned}$$

Also sind  $r: E \rightarrow f^*E'$  und  $s: f^*E' \rightarrow E$  zueinander inverse Homöomorphismen. Man prüft nun leicht nach, dass  $r: E \rightarrow f^*E'$  auch die Bedingung (3.43(b)(iii)) erfüllt, da die Abbildung  $\bar{f}: E \rightarrow E'$  sie nach Voraussetzung erfüllt.

Also sind  $p: E \rightarrow B$  und  $f^*p': f^*E' \rightarrow B$  äquivalent. □

**3.46 Definition.** Sei  $F$  ein beliebiger topologischer Raum,  $G$  eine Untergruppe von  $Top(F)$ , und  $p: E \rightarrow B$  ein Prinzipal- $G$ -Bündel mit Operation  $\nu: E \times G \rightarrow E$ . Definiere nun

$$\begin{aligned} e_y &:= \{(\nu(e, g), g^{-1}(y)) \in E \times F \mid g \in G\} \\ E_F &:= \{e_y \mid (e, y) \in E \times F\} \text{ und} \\ p_F: E_F &\rightarrow B \quad \text{durch } p_F(e_y) := p(e) . \end{aligned}$$

**3.47 Satz.** Sei  $F$  ein beliebiger topologischer Raum,  $G$  eine Untergruppe von  $Top(F)$ , und  $p: E \rightarrow B$  ein Prinzipal- $G$ -Bündel mit Operation  $\nu: E \times G \rightarrow E$ . Dann ist  $p_F: E_F \rightarrow B$  wohldefiniert und es gilt:  
 $p_F: E_F \rightarrow B$  ist ein Faserbündel mit Faser  $F$  und Strukturgruppe  $G$ .

*Beweis.* Die Wohldefiniertneit von  $p_F: E_F \rightarrow B$  folgt aus  $p(\nu(e, g)) = p(e)$ ,  $e \in E, g \in G$ . Sei nun  $\{U_j, \phi_j, j \in J\}$  ein Atlas von  $p: E \rightarrow B$ . Definiere  $\phi_j^F: U_j \times F \rightarrow p_F^{-1}(U_j)$  durch  $(b, y) \rightarrow (\phi_j(b, 1_G))_y$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} p_F \circ \phi_j^F(b, y) &= p_F((\phi_j(b, 1_G))_y) \\ &= p(\phi_j(b, 1_G)) \\ &= pr_1(b, 1_G) \\ &= b, \end{aligned} \quad \text{d.h. } p_F \circ \phi_j^F = pr_1: U_j \times F \rightarrow U_j.$$

Definiere weiter  $\psi_j: p_F^{-1}(U_j) \rightarrow U_j \times F$  durch  $e_y \rightarrow (p(e), (pr_2 \circ \phi_j^{-1}(e))(y))$ . Wegen  $p(\nu(e, g)) = p(e)$  und wegen  $(pr_2 \circ \phi_j^{-1}(\nu(e, g)))(g^{-1}(y)) = (pr_2 \circ \phi_j^{-1}(e)) \circ g(g^{-1}(y)) = (pr_2 \circ \phi_j^{-1}(e))(y)$  ist diese Abbildung wohldefiniert und es gilt:

$$\begin{aligned} \psi_j \circ \phi_j^F(b, y) &= \psi_j((\phi_j(b, 1_G))_y) \\ &= (p \circ \phi_j(b, 1_G), (pr_2 \circ \phi_j^{-1}(\phi_j(b, 1_G)))(y)) \\ &= (b, 1_G(y)) \\ &= (b, y) \\ \phi_j^F \circ \psi_j(e_y) &= \phi_j^F(p(e), (pr_2 \circ \phi_j^{-1}(e))(y)) \\ &= (\phi_j(p(e), 1_G))_{(pr_2 \circ \phi_j^{-1}(e))(y)} \\ &= (\nu(\phi_j(p(e), 1_G), (pr_2 \circ \phi_j^{-1}(e))))_{(pr_2 \circ \phi_j^{-1}(e))^{-1}(pr_2 \circ \phi_j^{-1}(e))(y)} \\ &= (\phi_j \circ \phi_j^{-1} \circ \nu(\phi_j(p(e), 1_G), (pr_2 \circ \phi_j^{-1}(e))))_y \\ &= (\phi_j(pr_1 \circ \phi_j^{-1} \circ \phi_j(p(e), 1_G), (pr_2 \circ \phi_j^{-1}(\phi_j(p(e), 1_G)))) \circ (pr_2 \circ \phi_j^{-1}(e))))_y \\ &= (\phi_j(p(e), pr_2 \circ \phi_j^{-1}(e)))_y \\ &= (\phi_j \circ \phi_j^{-1}(e))_y \\ &= e_y \end{aligned}$$

Also ist  $\phi_j^F: U_j \times F \rightarrow p_F^{-1}(U_j)$  ein Homöomorphismus für alle  $j \in J$ . Ferner gilt noch:

$$\begin{aligned} (\phi_j^F)^{-1} \circ \phi_{j'}^F(b, y) &= \psi_j \circ \phi_{j'}^F(b, y) \\ &= \psi_j((\phi_{j'}(b, 1_G))_y) \\ &= (p \circ \phi_{j'}(b, 1_G), pr_2 \circ \phi_{j'}^{-1}(\phi_{j'}(b, 1_G))(y)) \\ &= (b, pr_2(b, \mu(g_{jj'}(b), 1_G))(y)) \\ &= (b, g_{jj'}(b)(y)) \quad \forall b \in U_j \cap U_{j'}, y \in F. \end{aligned}$$

Also ist  $p_F: E_F \rightarrow B$  ein Faserbündel mit Faser  $F$  und Strukturgruppe  $G$ .  $\square$

**3.48 Satz.** Sei  $G$  eine Untergruppe von  $\text{Top}(F)$ ,  $F$  ein beliebiger topologischer Raum, und  $p: E \rightarrow B$  und  $p': E' \rightarrow B$  seien äquivalente Prinzipal- $G$ -Bündel. Dann sind  $p_F: E_F \rightarrow B$  und  $p'_F: E'_F \rightarrow B$  äquivalent.

*Beweis.* Nach Voraussetzung existiert ein Homöomorphismus  $r: E \rightarrow E'$  mit  $p' \circ r = p: E \rightarrow B$  und  $r(\nu(e, g)) = \nu'(r(e), g)$ . Definiere nun die Abbildung  $r': E_F \rightarrow E'_F$  durch  $e_y \rightarrow r(e)_y$ . Offensichtlich ist sie wohldefiniert und es gilt  $p'_F \circ r' = p_F: E_F \rightarrow B$ . Man prüft auch leicht nach, dass  $r': E_F \rightarrow E'_F$  ein Homöomorphismus ist. Ferner gilt für die Atlanten  $\{(U_j, \phi_j^F), j \in J\}$  und  $\{(V_k, \psi_k^F), k \in K\}$  von  $p_F: E_F \rightarrow B$  bzw.  $p'_F: E'_F \rightarrow B$ :

$$\begin{aligned} (\psi_k^F)^{-1} \circ r' \circ \phi_j^F(b, y) &= (\psi_k^F)^{-1} \circ r'(\phi_j(b, 1_G)_y) \\ &= (\psi_k^F)^{-1}(r(\phi_j(b, 1_G))_y) \\ &= (p'(r(\phi_j(b, 1_G))), (pr_2 \circ \psi_k^{-1}(r(\phi_j(b, 1_G)))(y)) \\ &= (p \circ \phi_j(b, 1_G), pr_2(b, \bar{g}_{jk}(b)(y))) \\ &= (b, \bar{g}_{jk}(b)(y)). \end{aligned} \quad \square$$

**3.49 Definition.** Sei  $p: E \rightarrow B$  ein Faserbündel mit lokalkompakter Faser  $F$  und Strukturgruppe  $G$ . Sei  $\bar{E}$  die Menge all der Homomorphismen  $f: F \rightarrow p^{-1}(b), b \in B$ , für die gilt:

Falls  $f: F \rightarrow p^{-1}(b)$  und  $f': F \rightarrow p^{-1}(b)$  aus  $\bar{E}$  sind, so ist  $f^{-1} \circ f': F \rightarrow F$  aus  $G$ .

$\bar{E}$  sei mit der kompakt-offenen Topologie versehen.

Ferner sei eine Abbildung  $\bar{p}: \bar{E} \rightarrow B$  durch  $\bar{p}(f) := p \circ f(y), y \in F$ , definiert.

**3.50 Satz.** Sei  $p: E \rightarrow B$  ein Faserbündel mit lokalkompakter Faser  $F$  und Strukturgruppe  $G$ . Dann ist  $\bar{p}: \bar{E} \rightarrow B$  wohldefiniert und ein Prinzipal- $G$ -Bündel.

*Beweis.* Die Wohldefiniertheit von  $\bar{p}: \bar{E} \rightarrow B$  ist offensichtlich.

Definiere nun die Abbildung  $\nu: \bar{E} \times G \rightarrow \bar{E}$  durch  $(f, g) \rightarrow f \circ g$ . Seien  $f: F \rightarrow p^{-1}(b)$  und  $f': F \rightarrow p^{-1}(b)$  beliebige Abbildungen aus  $\bar{E}$ . Dann gilt wegen  $f^{-1} \circ f' \in G$  und  $f'^{-1} \circ f \in G$  auch  $(f \circ g)^{-1} \circ f' = g^{-1} \circ f^{-1} \circ f' \in G$  und  $f'^{-1} \circ f \circ g \in G$ . Also ist  $\nu: \bar{E} \times G \rightarrow \bar{E}$  wohldefiniert. Ferner gilt:

$$\begin{aligned} \nu(f, 1_G) &= f \circ id_F \\ &= f \\ \nu(\nu(f, g), g') &= \nu(f \circ g, g') \\ &= f \circ g \circ g' \\ &= \nu(f, g \circ g') \\ &= \nu(f, \nu(g \circ g')) \\ \bar{p}(\nu(f, g)) &= p \circ f \circ g(y) \\ &= p \circ f(y) \\ &= \bar{p}(f) \end{aligned}$$

$\nu(f, \cdot): G \rightarrow \bar{p}^{-1}(\bar{p}(f))$  ist ein Homöomorphismus.

Definiere dazu  $\chi_f: \bar{p}^{-1}(\bar{p}(f)) \rightarrow G$  durch  $f' \rightarrow f^{-1} \circ f'$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \nu(f, \cdot) \circ \chi_f(f') &= \nu(f, \cdot)(f^{-1} \circ f') \\ &= f \circ f^{-1} \circ f' \\ &= f' \\ \chi_f \circ \nu(f, \cdot)(f') &= \chi_f(f \circ f') \\ &= f^{-1} \circ f \circ f' \\ &= f' \end{aligned}$$

Sei  $\{(U_j, \phi_j), j \in J\}$  ein Atlas von  $p: E \rightarrow B$ . Definiere

$\bar{\phi}_j: U_j \times G \rightarrow \bar{p}^{-1}(U_j)$  durch  $\bar{\phi}_j(b, g)(y) := \phi_j(b, g(y))$  und

$\psi_j: \bar{p}^{-1}(U_j) \rightarrow U_j \times G$  durch  $\psi_j(f) := (p \circ f(y), pr_2 \circ (\phi_j^{-1} | p^{-1}(p \circ f(y))) \circ f)$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \bar{p} \circ \bar{\phi}_j(b, g) &= p(\bar{\phi}_j(b, g)(y)) \\ &= p(\phi_j(b, g(y))) \\ &= pr_1(b, g(y)) \\ &= b \\ \psi_j \circ \bar{\phi}_j(b, g) &= \psi_j(\phi_j(b, g(y))) \\ &= (p \circ \phi_j(b, g(y)), pr_2 \circ (\phi_j^{-1} | p^{-1}(p \circ \phi_j(b, g(y)))) \circ \phi_j(b, g(y))) \\ &= (b, pr_2(b, g)) \\ &= (b, g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\phi}_j \circ \psi_j(f)(y) &= \bar{\phi}_j(p \circ f(y), pr_2 \circ (\phi_j^{-1} | p^{-1}(p \circ f(y))) \circ f)(y) \\
&= \phi_j(p \circ f(y), pr_2 \circ (\phi_j^{-1} | p^{-1}(p \circ f(y))) \circ f)(y) \\
&= \phi_j \circ \phi_j^{-1}(f(y)) \\
&= f(y) \\
\bar{\phi}_j^{-1} \circ \bar{\phi}_k(b, g)(y) &= \psi_j \circ \bar{\phi}_k(b, g)(y) \\
&= \psi_j(\phi_k(b, g(y))) \\
&= (p \circ \phi_k(b, g(y)), pr_2 \circ \phi_j^{-1} \circ \phi_k(b, g(y))) \\
&= (b, g_{jk}(b)(g(y))) \\
&= (b, g_{jk}(b) \circ g)(y)
\end{aligned}$$

Also ist  $\bar{p}: \bar{E} \rightarrow B$  ein Prinzipal-G-Bündel.  $\square$

**3.51 Satz.** Seien  $p: E \rightarrow B$  und  $p': E' \rightarrow B$  äquivalente Faserbündel mit lokalkompakter Faser  $F$  und Strukturgruppe  $G$ . Dann sind  $\bar{p}: \bar{E} \rightarrow B$  und  $\bar{p}': \bar{E}' \rightarrow B$  äquivalent.

*Beweis.* Nach Voraussetzung existiert ein Homomorphismus  $r: E \rightarrow E'$  mit  $p' \circ r = p: E \rightarrow B$ . Definiere eine Abbildung  $\bar{r}: \bar{E} \rightarrow \bar{E}'$  durch  $f \rightarrow r \circ f$ . Wegen  $p' \circ r \circ f(y) = p \circ f(y) = b \quad \forall f: F \rightarrow p^{-1}(b), b \in B$ , ist sie wohldefiniert. Außerdem gilt für die Atlanten  $\{(U_j, \phi_j), j \in J\}$  und  $\{(V_k, \psi_k), k \in K\}$  von  $\bar{p}: \bar{E} \rightarrow B$  bzw.  $\bar{p}': \bar{E}' \rightarrow B$ :

$$\begin{aligned}
\psi_k^{-1} \circ \bar{r} \circ \phi_j(b, g)(y) &= \psi_k^{-1} \circ \bar{r}(\phi_j(b, g(y))) \\
&= \psi_k^{-1}(r \circ \phi_j(b, g(y))) \\
&= (p' \circ r \circ \phi_j(b, g(y)), pr_2 \circ (\psi_k^{-1} | p'^{-1}(r \circ \phi_j(b, g(y)))) \circ r \circ \phi_j(b, g(y))) \\
&= (p \circ \phi_j(b, g(y)), pr_2(b, \bar{g}_{kj}(b)(g(y)))) \\
&= (b, \bar{g}_{kj}(b) \circ g(y)) \\
&= (b, \bar{g}_{kj}(b) \circ g)(y) \quad \forall b \in U_j \cap V_k, g \in G, y \in F.
\end{aligned}$$

Wegen  $\bar{r}(\bar{v}(f, g)) = r \circ \bar{v}(f, g) = r \circ (f \circ g) = (r \circ f) \circ g = \bar{v}'(\bar{r}(f), g)$  sind  $\bar{p}: \bar{E} \rightarrow B$  und  $\bar{p}': \bar{E}' \rightarrow B$  also äquivalent.  $\square$

**3.52 Satz.** Sei  $p: E \rightarrow B$  ein Faserbündel mit lokalkompakter Faser  $F$  und Strukturgruppe  $G$ . Dann sind  $(\bar{p})_F: (\bar{E})_F \rightarrow B$  und  $p: E \rightarrow B$  äquivalent.

*Beweis.* Definiere eine Abbildung  $h: (\bar{E})_F \rightarrow E$  durch  $f_y \rightarrow f(y), f \in \bar{E}, y \in F$ . Wegen  $h((f \circ g)_{g^{-1}(y)}) = f \circ g \circ g^{-1}(y) = f(y)$  ist sie wohldefiniert und es gilt  $p \circ h(f_y) = p \circ f(y) = (\bar{p})_F(f_y) \quad \forall f_y \in (\bar{E})_F$ . Sei  $\bar{\phi}_j: F \rightarrow p^{-1}(b), b \in U_j$ , der durch  $y \rightarrow \phi_j(b, y)$  definierte Homöomorphismus. Wegen

$$\begin{aligned}
\bar{\phi}_k^{-1} \circ \bar{\phi}_j(y) &= \bar{\phi}_k^{-1}(\phi_j(b, y)) \\
&= pr_2(\phi_k^{-1} \circ \phi_j(b, y)) \\
&= pr_2(b, g_{kj}(b)(y)) \\
&= g_{kj}(b)(y)
\end{aligned}$$

sind die  $\bar{\phi}_j: F \rightarrow p^{-1}(b)$  für alle  $j \in J$  aus  $\bar{E}$ .

Definiere nun  $\bar{h}: E \rightarrow (\bar{E})_F$  durch  $e \rightarrow (\bar{\phi}_j)_{\bar{\phi}_j^{-1}(e)}$  für  $p(e) \in U_j$ . Wegen

$$\begin{aligned}
(\bar{\phi}_k)_{\bar{\phi}_k^{-1}(e)} &= (\bar{\phi}_k \circ g_{kj}(p(e)))_{g_{kj}p(e)}^{-1} \circ \bar{\phi}_k^{-1}(e) \\
&= (\bar{\phi}_j)_{(\bar{\phi}_k \circ g_{kj}(p(e)))^{-1}(e)} \\
&= (\bar{\phi}_j)_{\bar{\phi}_j^{-1}(e)} \quad \forall p(e) \in U_j \cap U_k
\end{aligned}$$

ist sie wohldefiniert und es gilt:

$$\begin{aligned}
h \circ \bar{h}(e) &= h((\bar{\phi}_j)_{\bar{\phi}_j^{-1}(e)}) \\
&= \bar{\phi}_j \circ \bar{\phi}_j^{-1}(e) \\
&= e \\
\bar{h} \circ h(f_y) &= \bar{h}(f(y)) \\
&= (\bar{\phi}_j)_{\bar{\phi}_j^{-1}(f(y))} \\
&= \bar{\phi}_j \circ \bar{\phi}_j^{-1} \circ f_{(\bar{\phi}_j^{-1} \circ f)^{-1} \circ \bar{\phi}_j \circ f(y)} \\
&= f_{f^{-1} \circ \bar{\phi}_j \circ \bar{\phi}_j^{-1} \circ f(y)} \\
&= f_y
\end{aligned}$$

Also ist  $\bar{h}: (\bar{E})_F \rightarrow E$  ein Homöomorphismus.

Definiere nun zu jedem  $j \in J$  die Abbildung  $\bar{\phi}_j^F: U_j \times F \rightarrow (\bar{p})_F^{-1}(U_j)$  durch  $(b, y) \rightarrow (\bar{\phi}_j)_y$ .

Dies ist offensichtlich ein Homöomorphismus und es gilt:

$$\begin{aligned}
\phi_k^{-1} \circ r \circ \bar{\phi}_j^F(b, y) &= \phi_k^{-1} \circ r((\bar{\phi}_j)_y) \\
&= \phi_k^{-1}(\bar{\phi}_j(y)) \\
&= \phi_k^{-1} \circ \phi_j(b, y) \\
&= (b, g_{kj}(b)(y)).
\end{aligned}$$

Also sind  $(\bar{p})_F: (\bar{E})_F \rightarrow B$  und  $p: E \rightarrow B$  äquivalent.  $\square$

**3.53 Satz.** Sei  $F$  ein lokalkompakter topologischer Raum,  $G$  eine Untergruppe von  $\text{Top}(F)$  und  $p: E \rightarrow B$  ein Prinzipal- $G$ -Bündel. Dann sind  $\bar{p}_F: \bar{E}_F \rightarrow B$  und  $p: E \rightarrow B$  äquivalent.

*Beweis.* Seien  $\{(U_j, \phi_j), j \in J\}$ ,  $\phi_j: U_j \times G \rightarrow p^{-1}(U_j)$ ,  
 $\{(U_j, \phi_j^F), j \in J\}$ ,  $\phi_j^F(b, y) := (\phi_j(b, 1_G))_y$ , und  
 $\{(U_j, \bar{\phi}_j^F), j \in J\}$ ,  $\bar{\phi}_j^F(b, g)(y) := \phi_j^F(b, g(y))$

die Atlanten von  $p: E \rightarrow B$ ,  $p_F: E_F \rightarrow B$  bzw.  $\bar{p}_F: \bar{E}_F \rightarrow B$ .

Definiere nun  $h: E \rightarrow \bar{E}_F$  durch  $h(e) := \bar{\phi}_j^F(\phi_j^{-1}(e)) \quad \forall e \in p^{-1}(U_j), j \in J$ . Wegen

$$\begin{aligned}
\bar{\phi}_k^F(\phi_k^{-1}(e)) &= \bar{\phi}_j^F(p(e), g_{jk}(p(e)) \circ (pr_2 \circ \phi_k^{-1}(e))) \\
&= \bar{\phi}_j^F(p(e), g_{jk}(p(e)) \circ (pr_2 \circ \phi_k^{-1}(\phi_j \circ \phi_j^{-1}(e)))) \\
&= \bar{\phi}_j^F(p(e), g_{jk}(p(e)) \circ (pr_2(p(e), g_{kj}(p(e)) \circ (pr_2 \circ \phi_j^{-1}(e)))) \\
&= \bar{\phi}_j^F(p(e), g_{jk}(p(e)) \circ g_{kj}(p(e)) \circ (pr_2 \circ \phi_j^{-1}(e))) \\
&= \bar{\phi}_j^F(pr_1 \circ \phi_j^{-1}(e), pr_2 \circ \phi_j^{-1}(e)) \\
&= \bar{\phi}_j^F(\phi_j^{-1}(e)) \quad \forall e \in p^{-1}(U_j \cap U_k)
\end{aligned}$$

ist  $h: E \rightarrow \bar{E}_F$  wohldefiniert. Da die  $\phi_j: U_j \times G \rightarrow p^{-1}(U_j)$ ,  $\bar{\phi}_j^F: U_j \times G \rightarrow \bar{p}_F^{-1}(U_j)$ ,  $j \in J$ , Homöomorphismen sind, ist auch  $h: E \rightarrow \bar{E}_F$  ein Homöomorphismus. Ferner gilt:

$$\begin{aligned}
\bar{p}_F \circ h(e) &= \bar{p}_F(\bar{\phi}_j^F(\phi_j^{-1}(e))) \\
&= pr_1(\phi_j^{-1}(e)) \\
&= p(e)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h(\nu(e, g))(y) &= \bar{\phi}_j^F(\phi_j^{-1}(\nu(e, g)))(y) \\
&= \bar{\phi}_j^F(p(e), (pr_2 \circ \phi_j^{-1}(e)) \circ g)(y) \\
&= (\phi_j(p(e), 1_G))_{pr_2 \circ \phi_j^{-1}(e) \circ g(y)} \\
&= \bar{\phi}_j^F(p(e), pr_2 \circ \phi_j^{-1}(e))(g(y)) \\
&= h(e) \circ g(y) \\
&= \nu'(h(e), g)(y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\bar{\phi}_k^F)^{-1} \circ h \circ \phi_j(b, g) &= (\bar{\phi}_k^F)^{-1} \circ \bar{\phi}_j^F(\phi_j^{-1}(\phi_j(b, g))) \\
&= (\bar{\phi}_k^F)^{-1} \circ \bar{\phi}_j^F(b, g) \\
&= (b, g_{kj}(b) \circ g)
\end{aligned}$$

Also sind  $p: E \rightarrow B$  und  $\bar{p}_F: \bar{E}_F \rightarrow B$  äquivalent.  $\square$

**3.54 Korollar.** *Es existiert eine Bijektion zwischen der Menge  $\tilde{L}F_G(B)$  der Äquivalenzklassen von Faserbündeln über  $B$  mit lokalkompakter Faser  $F$  und Strukturgruppe  $G$  und der Menge  $\tilde{Q}F_G(B)$  der Äquivalenzklassen von Prinzipal- $G$ -Bündeln über  $B$ .*

*Beweis.* Die Zuordnungen  $\tilde{L}F_G(B) \rightarrow \tilde{Q}F_G(B), [p: E \rightarrow B] \rightarrow [\bar{p}: \bar{E} \rightarrow B]$ , und  $\tilde{Q}F_G(B) \rightarrow \tilde{L}F_G(B), [p: E \rightarrow B] \rightarrow [p_F: E_F \rightarrow B]$ , sind wegen (3.48) bzw. (3.51) wohldefiniert und wegen (3.52) und (3.53) bijektiv und zueinander invers.  $\square$

**3.55 Satz.** *Ein Prinzipal- $G$ -Bündel  $p: E \rightarrow B$  besitzt die HLE bezüglich  $I^n, n \geq 0$ .*

*Beweis.* Seien Abbildungen  $f: I^n \times \{0\} \rightarrow E$  und  $H: I^n \times I \rightarrow B$  mit  $H|_{I^n \times \{0\}} = p \circ f: I^n \times \{0\} \rightarrow B$  gegeben.  $\{(U_j, \phi_j), j \in J\}$  sei ein Atlas von  $p: E \rightarrow B$ . Wegen der Stetigkeit von  $H: I^n \times I \rightarrow B$  ist  $\{H^{-1}(U_j), j \in J\}$  eine offene Überdeckung von  $I^n \times I$ .  $\lambda$  sei eine lebesguesche Zahl dieser Überdeckung, d.h. jede Teilmenge von  $I^n \times I$ , deren Durchmesser kleiner als  $\lambda$  ist, liegt ganz in einem  $H^{-1}(U_j), j \in J$ . Zerlege  $I^n$  in Würfel  $W$ , sodass der Durchmesser jedes Würfels kleiner als  $\frac{\lambda}{2}$  ist. Sei  $0 = t_0 < \dots < t_k = 1$  eine Unterteilung von  $I$ , sodass für alle  $W$  der Durchmesser von  $W \times [t_i, t_{i+1}]$  kleiner als  $\lambda$  ist. Sei nun eine Abbildung  $H': I^n \times [0, t_i] \rightarrow E$  gegeben mit  $p \circ H' = H|_{I^n \times [0, t_i]}: I^n \times [0, t_i] \rightarrow B$  und  $H'|_{I^n \times \{0\}} = f: I^n \times \{0\} \rightarrow E$ ; auf  $I^n \times [0, t_0] = I^n \times \{0\}$  ist  $H' = f: I^n \times \{0\} \rightarrow E$ . Definiere nun  $H'': I^n \times [t_i, t_{i+1}] \rightarrow E$  würfelweise durch Induktion über die Dimension der Würfel.

$\dim(W) = 0$ : Wähle ein  $j \in J$  so, dass  $H(W \times [t_i, t_{i+1}]) \subset U_j$  gilt. Sei  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ . Nach Voraussetzung gilt  $p \circ H'(w, t_i) = H(w, t_i)$ , d.h.  $H'(w, t_i) \in p^{-1}(U_j)$ .

Definiere  $H'': W \times [t_i, t_{i+1}] \rightarrow E$  durch  $H''(w, t) := \phi_j(H(w, t), p_F \circ \phi_j^{-1}(H'(w, t_i)))$ .

Sei nun  $H'': I^n \times [t_i, t_{i+1}] \rightarrow E$  für alle  $W' \times [t_i, t_{i+1}]$  mit  $\dim(W') < m$  definiert.  $W$  sei ein Würfel der Dimension  $m$ . Wähle ein  $j \in J$ , sodass  $H(W \times [t_i, t_{i+1}]) \subset U_j$  gilt.

$H'': I^n \times [t_i, t_{i+1}] \rightarrow E$  ist auf  $W \times \{t_i\} \cup \dot{W} \times [t_i, t_{i+1}]$  bereits definiert.

Da  $p \circ \phi_j: U_j \times G \rightarrow U_j$  als triviales Bündel offensichtlich eine Faserung ist, existiert eine Abbildung  $K: W \times [t_i, t_{i+1}] \rightarrow U_j \times G$  mit

$K|_{W \times \{t_i\} \cup \dot{W} \times [t_i, t_{i+1}]} = \phi_j^{-1} \circ H''|_{W \times \{t_i\} \cup \dot{W} \times [t_i, t_{i+1}]}: W \times \{t_i\} \cup \dot{W} \times [t_i, t_{i+1}] \rightarrow U_j \times G$  und  $p \circ \phi_j \circ K = H|_{W \times [t_i, t_{i+1}]}: W \times [t_i, t_{i+1}] \rightarrow U_j$ .

Also wird durch  $\phi_j \circ K: W \times [t_i, t_{i+1}] \rightarrow p^{-1}(U_j)$  die Abbildung  $H'': I^n \times [t_i, t_{i+1}] \rightarrow E$  auf  $W \times [t_i, t_{i+1}]$  definiert.

Auf diese Weise erhält man eine Abbildung  $\bar{H}: I^n \times I \rightarrow E$  mit  $p \circ \bar{H} = H: I^n \times I \rightarrow B$  und  $\bar{H}|_{I^n \times \{0\}} = f: I^n \times \{0\} \rightarrow E$ .  $\square$

**3.56 Satz.** *Seien  $p: E \rightarrow B$  und  $p': E' \rightarrow B'$  Prinzipal- $G$ -Bündel, ( $f: (p \times id_I)^{-1}(D^n \times \{0\}) \cup S^{n-1} \times I \rightarrow E', f': D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times I \rightarrow B'$ ) eine Prinzipal- $G$ -Bündel-Abbildung und  $F: D^n \times I \rightarrow B'$  eine Abbildung mit  $F|(D^n \times \{0\}) \cup S^{n-1} \times I = f': D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times I \rightarrow B'$ . Dann existiert eine Abbildung  $H: E \times I \rightarrow E'$ , sodass gilt:*

$H|(p \times id_I)^{-1}(D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times I) = f: (p \times id_I)^{-1}(D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times I) \rightarrow E'$  und  $(H: E \times I \rightarrow E', F: D^n \times I \rightarrow B')$  ist eine Prinzipal-G-Bündel-Abbildung.

Den Beweis werde ich hier nicht näher ausführen. Die Beweisidee entspricht im Wesentlichen der im Beweis von (3.55). Einzelheiten kann man bei [30], Lemma 11.28 finden.

**3.57 Satz.** Seien  $p: E \rightarrow B$  und  $p': E' \rightarrow B'$  Prinzipal-G-Bündel,  $B$  ein CW-Komplex und  $(h: E \rightarrow E', f: B \rightarrow B')$  eine Prinzipal-G-Bündel-Abbildung. Ferner sei eine Abbildung  $F: B \times I \rightarrow B'$  mit  $F(b, 0) = f(b) \forall b \in B$  gegeben. Dann existiert eine Abbildung  $H: E \times I \rightarrow E'$ , sodass gilt:

$$H(e, 0) = h(e) \quad \forall e \in E \text{ und}$$

$(H: E \times I \rightarrow E', F: B \times I \rightarrow B')$  ist eine Prinzipal-G-Bündel-Abbildung.

*Beweis.* Der Beweis erfolgt durch Induktion über die Gerüste von  $B$ .

Konstruiere zunächst eine Abbildung  $H^0: (p \times id_I)^{-1}(B^0 \times I) \rightarrow E'$ : Wähle zu jedem  $b \in B^0$  ein  $e' \in p'^{-1}(f(b))$  und definiere dadurch eine Abbildung  $r: B^0 \times \{0\} \rightarrow E'$  mit  $p' \circ r(b, 0) = F(b, 0)$ . Wegen (3.55) existiert dann eine Abbildung  $s: B^0 \times I \rightarrow E'$  mit  $p' \circ s = F|_{B^0 \times I}: B^0 \times I \rightarrow B'$  und  $s(b, 0) = r(b, 0)$ . Definiere nun

$$\bar{H}^0: (p \times id_I)^{-1}(B^0 \times I) \rightarrow E' \text{ durch } \bar{H}^0(e, t) := \nu'(s(p(e), t), \nu'(s(p(e), 0), \cdot)^{-1}(h(e))).$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} F \circ (p \times id_I)(e, t) &= F(p(e), t) \\ &= p' \circ s(p(e), t) \\ &= p'(\nu'(s(p(e), t), \nu'(s(p(e), 0), \cdot)^{-1}(h(e)))) \\ &= p' \circ \bar{H}^0(e, t) \\ \bar{H}^0(\nu(e, g), t) &= \nu'(s(p(\nu(e, g)), t), \nu'(s(p(\nu(e, g)), 0), \cdot)^{-1}(h(\nu(e, g)))) \\ &= \nu'(s(p(e), t), \nu'(s(p(e), 0), \cdot)^{-1}(\nu'(h(e), g)))) \\ &= \nu'(s(p(e), t), \mu(\nu'(s(p(e), 0), \cdot)^{-1}(h(e)), g)) \\ &= \nu'(\nu'(s(p(e), t), \nu'(s(p(e), 0), \cdot)^{-1}(h(e))), g) \\ &= \nu'(\bar{H}^0(e, t), g) \\ \bar{H}^0(e, 0) &= \nu'(s(p(e), 0), \nu'(s(p(e), 0), \cdot)^{-1}(h(e))) \\ &= h(e) \end{aligned}$$

Definiere nun  $H^0: (p \times id_I)^{-1}(B^0 \times I) \rightarrow E'$  durch  $H^0(\phi_j(b, g), t) := \psi_k(F(b, t), \mu(\bar{g}_{jk}(b, t), g))$ , wobei  $\bar{g}_{jk}: U_j \cap (F|_{B^0 \times I})^{-1}(V_k) \rightarrow G$  folgendermaßen definiert sei:

$$(b, t) \rightarrow \nu'(\psi_k(F(b, 0), \bar{g}_{jk}(b, \cdot))^{-1} \circ \nu'(s(b, 0), \cdot) \circ pr_2 \circ \psi_k^{-1} \circ s(b, t)).$$

Dann ist  $(H^0: (p \times id_I)^{-1}(B^0 \times I) \rightarrow E', F|_{B^0 \times I}: B^0 \times I \rightarrow B')$  offensichtlich eine Prinzipal-G-Bündel-Abbildung und es gilt  $H^0(e, 0) = h(e) \forall e \in p^{-1}(B^0)$ .

Sei nun eine Abbildung  $H^n: (p \times id_I)^{-1}(B^n \times I) \rightarrow E'$  gegeben, sodass  $H^n(e, 0) = h(e) \forall e \in E$  und  $(H^n: (p \times id_I)^{-1}(B^n \times I) \rightarrow E', f|_{B^n \times I}: B^n \times I \rightarrow B')$  eine Prinzipal-G-Bündel-Abbildung ist. Sei  $\phi: (D^{n+1}, S^n) \rightarrow (B^{n+1}, B^n)$  die charakteristische Abbildung einer  $(n+1)$ -Zelle und  $C := B^{n+1} \times \{0\} \cup B^n \times I$ . Definiere eine Abbildung  $K: (p \times id_I)^{-1}(C) \rightarrow E'$  durch  $K(e, 0) = h(e) \forall e \in p^{-1}(B^{n+1})$  und  $K(e, t) = H^n(e, t) \forall (e, t) \in (p \times id_I)^{-1}(B^n \times I)$ .

Dann ist folgendes Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccccc} (\phi^* p \times id_I)^{-1}(D^{n+1} \times \{0\} \cup S^n \times I) & \xrightarrow{pr_C \times id_I} & (p \times id_I)^{-1}(C) & \xrightarrow{K} & E' \\ \downarrow \phi^* p \times id_I & & \downarrow p \times id_I & & \downarrow p' \\ D^{n+1} \times \{0\} \cup S^n \times I & \xrightarrow{\phi \times id_I} & C & \xrightarrow{F|_C} & B' \\ \downarrow & & \nearrow (F|_{B^{n+1} \times I}) \circ (\phi \times id_I) & & \\ D^{n+1} \times I & & & & \end{array}$$

Somit existiert wegen (3.56) eine Abbildung  $K': (\phi^*p \times id_I)^{-1}(D^{n+1} \times I) \rightarrow E'$ , sodass gilt:

$K'|(\phi^*p \times id_I)^{-1}(D^{n+1} \times \{0\} \cup S^n \times I) = K \circ (pr_C \times id_I): (\phi^*p \times id_I)^{-1}(D^{n+1} \times \{0\} \cup S^n \times I) \rightarrow E'$   
 und  $(K: (\phi^* \times id_I)^{-1}(D^{n+1} \times I) \rightarrow E', (F|B^{n+1} \times I) \circ (\phi \times id_I): D^{n+1} \times I \rightarrow B')$  ist eine Prinzipal-G-Bündel-Abbildung.

Mit Hilfe dieser Abbildung lässt sich nun eine Abbildung  $H^{n+1}: (p \times id_I)^{-1}(B^{n+1} \times I) \rightarrow E'$  definieren, die die notwendigen Eigenschaften besitzt, um den Induktionsschritt zu beenden.  $\square$

**3.58 Korollar.** *Sei ein Prinzipal-G-Bündel  $p: E \rightarrow B$  gegeben und  $f_0, f_1: X \rightarrow B$  seien zwei homotope Abbildungen. Falls  $X$  ein CW-Komplex ist, sind  $f_0^*p: f_0^*E \rightarrow X$  und  $f_1^*p: f_1^*E \rightarrow X$  äquivalent.*

*Beweis.*  $F: X \times I \rightarrow B$  definiere eine Homotopie zwischen  $f_0: X \rightarrow B$  und  $f_1: X \rightarrow B$ . Wegen (3.57) existiert dann eine Prinzipal-G-Bündel-Abbildung  $(F': f_0^*E \times I \rightarrow E, F: X \times I \rightarrow B)$  zwischen  $f_0^*p \times id_I: f_0^*E \times I \rightarrow X \times I$  und  $p: E \rightarrow B$ . Also sind nach (3.45(b)) die beiden Prinzipal-G-Bündel  $f_0^*p \times id_I: f_0^*E \times I \rightarrow X \times I$  und  $F^*p: F^*E \rightarrow X \times I$  äquivalent.

Sei die Abbildung  $i_1: X \rightarrow X \times I$  durch  $x \rightarrow (x, 1)$  definiert. Dann gilt  $f_1 = F \circ i_1: X \rightarrow B$  und wegen (3.45(c)) sind  $f_1^*p: f_1^*E \rightarrow X$  und  $i_1^*(f_0^*p \times id_I): i_1^*(f_0^*E \times I) \rightarrow X$  äquivalent. Da aber  $i_1^*(f_0^*p \times id_I): i_1^*(f_0^*E \times I) \rightarrow X$  mit  $(f_0^*p \times id_I)|(f_0^*p \times id_I)^{-1}(X \times \{1\}): (f_0^*p \times id_I)^{-1}(X \times \{1\}) \rightarrow X \times \{1\}$  übereinstimmt und dieses Prinzipal-G-Bündel wiederum zu  $f_0^*p: f_0^*E \rightarrow X$  äquivalent ist, ist die Aussage bewiesen.  $\square$



## 4 Homotopietheoretische Klassifikation von Prinzipal-M-Quasifaserungen bzw. Prinzipal-G-Bündeln und Hindernistheorie

In diesem Paragraphen werden die zu jedem assoziativen topologischen Monoid existierenden klassifizierenden Räume eingeführt und gezeigt, unter welchen Umständen diese Räume dazu dienen, Prinzipal-M-Quasifaserungen bzw. Prinzipal-G-Bündel homotopietheoretisch zu klassifizieren. Ferner wird der Begriff der stabilen Faserhomotopieäquivalenz eingeführt und schließlich noch ein Hindernis gegen die Fortsetzung von Schnitten definiert, welches im nächsten Paragraphen benutzt wird, um die wesentliche Aussage dieser Arbeit herzuleiten.

**4.1 Definition.** Eine Prinzipal-M-Quasifaserung  $p: E \rightarrow B$  heißt *universell*, falls sie wegzusammenhängend und  $\pi_i(E, e_0) = 0$  für alle  $i \geq 1$  ist.

**4.2 Satz.** Sei  $p: E \rightarrow B$  eine universelle Prinzipal-M-Quasifaserung mit Operation  $\nu: E \times M \rightarrow E$  und  $(X, A)$  ein relativer CW-Komplex. Ferner seien eine Prinzipal-M-Quasifaserung  $p': X' \rightarrow X$  mit Operation  $\nu': X' \times M \rightarrow X'$  und Abbildungen  $\bar{h}: p'^{-1}(A) \rightarrow E$ ,  $h: A \rightarrow B$  mit  $p \circ \bar{h} = h \circ p'$ :  $p'^{-1}(A) \rightarrow B$  und  $\bar{h} \circ \nu' = \nu \circ (\bar{h} \times id_M)$ :  $p'^{-1}(A) \times M \rightarrow E$  gegeben.

Dann existieren Fortsetzungen  $\bar{h}': X' \rightarrow E$  von  $\bar{h}: p'^{-1}(A) \rightarrow E$  und  $h': X' \rightarrow B$  von  $h: A \rightarrow B$  mit  $p \circ \bar{h}' = h' \circ p'$ :  $X' \rightarrow B$  und  $\bar{h}' \circ \nu' = \nu \circ (\bar{h}' \times id_M)$ :  $X' \times M \rightarrow E$ .

*Beweis.* Die Abbildungen  $\bar{h}': X' \rightarrow E$  und  $h': X' \rightarrow B$  werden induktiv über die Gerüste von  $(X, A)$  konstruiert:

Sei  $e_j^0, j \in J$ , eine Nullzelle von  $X - A$ . Wähle zu jedem  $j \in J$  einen Punkt  $x'_j \in p'^{-1}(e_j^0)$  und einen Punkt  $y_j \in E$ . Sei  $f_j^0: p'^{-1}(e_j^0) \rightarrow M$  das Homotopieinverse von  $\nu'(x'_j, \cdot): M \rightarrow p'^{-1}(e_j^0)$ . Wegen  $\nu'(x'_j, \mu(m, m')) = \nu'(\nu'(x'_j, m), m')$  folgt analog zu (1.22), dass  $f_j^0 \circ \nu' = \mu \circ (f_j^0 \times id_M): p'^{-1}(e_j^0) \times M \rightarrow M$  ist. Definiere nun Abbildungen  $\bar{h}^0: p'^{-1}((X, A)^0) \rightarrow E$  und  $h^0: (X, A)^0 \rightarrow B$  durch

$$\bar{h}^0(x') := \begin{cases} \bar{h}(x') & \forall x' \in p'^{-1}(A) \\ \nu(y_j, f_j^0(x')) & \forall x' \in p'^{-1}(e_j^0) \end{cases}$$

$$h^0(x) := \begin{cases} h(x) & \forall x \in A \\ p(y_j) & \forall x \in e_j^0 \end{cases}$$

Offensichtlich ist dann  $\bar{h}^0|_{p'^{-1}(A)} = \bar{h}: p'^{-1}(A) \rightarrow E$  und  $h^0|_A = h: A \rightarrow B$ . Ferner gilt:

$$p \circ \bar{h}^0(x') = \begin{cases} p(\bar{h}(x')) & = p(\bar{h}(x')) & = h(p'(x')) & , x' \in p'^{-1}(A) \\ p(\nu(y_j, f_j^0(x'))) & = p(y_j) & = h(p'(x')) & , x' \in p'^{-1}(e_j^0) \end{cases} = h^0 \circ p'(x')$$

$$\bar{h}^0 \circ \nu'(x', m) = \nu(y_j, f_j^0(\nu'(x', m))) = \nu(y_j, \mu(f_j^0(x'), m))$$

$$= \nu(\nu(y_j, f_j^0(x')), m) = \nu(\bar{h}^0(x'), m) \quad x' \in p'^{-1}(e_j^0)$$

Da  $\{e_j^0, j \in J\}$  diskret ist,  $\{e_j^0, j \in J\} \cap A = \emptyset$  und  $\bar{h}^0: p'^{-1}((X, A)^0) \rightarrow E$  eine Fortsetzung von  $\bar{h}: p'^{-1}(A) \rightarrow E$  ist, gilt  $\bar{h}^0 \circ \nu' = \nu \circ (\bar{h}^0 \times id_M): p'^{-1}((X, A)^0) \times M \rightarrow E$ .

Seien nun Fortsetzungen  $\bar{h}^n: p'^{-1}((X, A)^n) \rightarrow E$  von  $\bar{h}: p'^{-1}(A) \rightarrow E$  und  $h^n: (X, A)^n \rightarrow B$  von  $h: A \rightarrow B$  mit  $p \circ \bar{h}^n = h^n \circ p'$ :  $p'^{-1}((X, A)^n) \rightarrow B$  und  $\bar{h}^n \circ \nu' = \nu \circ (\bar{h}^n \times id_M)$ :  $p'^{-1}((X, A)^n) \times M \rightarrow E$  gegeben.

Sei  $e_k, k \in K$ , eine  $(n+1)$ -Zelle von  $X - (X, A)^n$  mit charakteristischer Abbildung  $F_k: (D_0^{n+1}, S^n) \rightarrow ((X, A)^{n+1}, (X, A)^n)$  und  $D_0^{n+1} := \{z \in D_0^{n+1} \mid \|z\| < \frac{1}{2}\}$ .

Dann ist  $(X, A)^n$  ein strenger Deformationsretrakt von  $(X, A)^{n+1} - \bigcup_{k \in K} F_k(D_0^{n+1})$ .

Sei  $r: ((X, A)^{n+1} - \bigcup_{k \in K} F_k(D_0^{n+1})) \rightarrow (X, A)^n$  eine Deformationsretraktion und

$\tilde{r}: p'^{-1}((X, A)^{n+1} - \bigcup_{k \in K} F_k(D_0^{n+1})) \rightarrow p'^{-1}((X, A)^n)$  die dadurch induzierte Homotopieäquivalenz, für die  $\tilde{r} \circ \nu' = \nu \circ (\tilde{r} \times id_M)$ :  $p'^{-1}((X, A)^{n+1} - \bigcup_{k \in K} F_k(D_0^{n+1})) \times M \rightarrow p'^{-1}((X, A)^n)$  gilt. Definiere nun  $\tilde{h} := \bar{h}^n \circ \tilde{r}: p'^{-1}((X, A)^{n+1} - \bigcup_{k \in K} F_k(D_0^{n+1})) \rightarrow E$ .

Sei  $\tilde{p}: \overline{D_0^{n+1}} \rightarrow \overline{D_0^{n+1}}$  die durch die Inklusion  $F_k|_{\overline{D_0^{n+1}}}: (\overline{D_0^{n+1}}, \overline{D_0^{n+1}}) \rightarrow ((X, A)^{n+1}, ((X, A)^{n+1} - \bigcup_{k \in K} F_k(D_0^{n+1})))$  aus  $p': p'^{-1}((X, A)^{n+1}) \rightarrow (X, A)^{n+1}$  induzierte Prinzipal-M-Quasifaserung und  $\tilde{i}: \overline{D_0^{n+1}} \rightarrow p'^{-1}((X, A)^{n+1})$  die dadurch definierte Inklusion. Da  $\overline{D_0^{n+1}}$  zusammenziehbar ist, existiert eine Homotopieäquivalenz  $g: \overline{D_0^{n+1}} \times M \rightarrow \overline{D_0^{n+1}}$ , durch die  $\tilde{p}: \overline{D_0^{n+1}} \rightarrow \overline{D_0^{n+1}}$  und  $pr: \overline{D_0^{n+1}} \times M \rightarrow \overline{D_0^{n+1}}$  strukturäquivalent sind. Dann ist  $\tilde{h}: p'^{-1}((X, A)^{n+1} - \bigcup_{k \in K} F_k(D_0^{n+1})) \rightarrow E$  auf  $\tilde{i} \circ g(\partial \overline{D_0^{n+1}} \times M)$ ,

insbesondere also auch auf  $\tilde{i} \circ g(\partial \overline{D_0^{n+1}} \times \{1_M\})$  definiert. Da  $\pi_i(E, e_0) = 0 \forall i \geq 1$  und  $\overline{D_0^{n+1}} \times \{1_M\} \approx S^n$  ist, existiert eine Fortsetzung  $\phi: \overline{D_0^{n+1}} \rightarrow E$  von  $\tilde{h} \circ \tilde{i} \circ g|_{(\overline{D_0^{n+1}} \times \{1_M\})}: \overline{D_0^{n+1}} \times \{1_M\} \rightarrow E$ .

Definiere nun  $\bar{h}^{n+1}: p'^{-1}((X, A)^{n+1}) \rightarrow E$  durch

$$\bar{h}^{n+1}(x') := \begin{cases} \bar{h}^n \circ r(x') & \forall x' \in p'^{-1}((X, A)^{n+1} - \bigcup_{k \in K} F_k(D_0^{n+1})) \\ \nu(\phi \circ pr_1 \circ g^{-1} \circ \tilde{i}^{-1}(x'), pr_2 \circ g^{-1} \circ \tilde{i}^{-1}(x')) & \forall x' \in p'^{-1}(F_k(D_0^{n+1})) \end{cases}$$

und  $h^{n+1}: (X, A)^{n+1} \rightarrow B$  durch

$$h^{n+1} := \begin{cases} h^n \circ r(x) & \forall x \in (X, A)^{n+1} - \bigcup_{k \in K} F_k(D_0^{n+1}) \\ p \circ \phi \circ F_k^{-1}(x) & \forall x \in F_k(D_0^{n+1}) \end{cases}$$

Diese Abbildungen sind offensichtlich Fortsetzungen von  $\bar{h}^n: p'^{-1}((X, A)^n) \rightarrow E$  bzw.  $h^n: (X, A)^n \rightarrow B$  und es gilt  $p \circ \bar{h}^{n+1} = h^{n+1} \circ p'$ :  $p'^{-1}((X, A)^{n+1}) \rightarrow B$  und  $\bar{h}^{n+1} \circ \nu' = \nu \circ (\bar{h}^{n+1} \times id_M)$ :  $p'^{-1}((X, A)^{n+1}) \times M \rightarrow p'^{-1}((X, A)^{n+1})$ .

Definiere nun  $\bar{h}': X' \rightarrow E$  durch  $\bar{h}'(x') := \bar{h}^n(x')$ ,  $x' \in p'^{-1}((X, A)^n)$ , und  $h': X \rightarrow B$  durch  $h'(x) := h^n(x)$ ,  $x \in (X, A)^n$ .  $\square$

**4.3 Satz.** Seien eine universelle Prinzipal-M-Quasifaserung  $p: E \rightarrow B$  und ein CW-Komplex  $B'$  gegeben. Dann gilt:

- Zu jeder Prinzipal-M-Quasifaserung  $p': E' \rightarrow B'$  existiert eine Abbildung  $f: B' \rightarrow B$ , sodass  $p': E' \rightarrow B'$  und  $f^*p: f^*E \rightarrow B'$  strukturäquivalent sind.  $f: B' \rightarrow B$  heißt klassifizierende Abbildung von  $p': E' \rightarrow B'$ .
- Seien  $f_0, f_1: B' \rightarrow B$  Abbildungen, sodass  $f_0^*p: f_0^*E \rightarrow B'$  und  $f_1^*p: f_1^*E \rightarrow B'$  strukturäquivalent sind. Dann sind  $f_0: B' \rightarrow B$  und  $f_1: B' \rightarrow B$  homotop.

*Beweis.*

(a) folgt aus (4.2) mit  $(X, A) := (B', \emptyset)$  und (3.22(b)).

(b) Nach Voraussetzung existiert eine schwache Homotopieäquivalenz  $h: f_0^*E \rightarrow f_1^*E$  mit  $f_1^*p \circ h = f_0^*p: f_0^*E \rightarrow B'$  und  $h \circ f_0^*\nu = f_1^*\nu \circ (h \times id_M): f_0^*E \times M \rightarrow f_1^*E$ . Betrachte nun die Prinzipal-M-Quasifaserung  $p'': E'' \rightarrow B''$  mit  $E'' := f_0^*E \times I$ ,  $B'' := B' \times I$  und  $p'' := f_0^*p \times id_I: E'' \rightarrow B''$ . Sei  $A := B' \times \{0\} \cup B' \times \{1\}$  und definiere Abbildungen

$$\begin{aligned} \bar{g}: p''^{-1}(A) \rightarrow E & \text{ durch } \bar{g}(y, 0) := pr_2(y), & y \in f_0^*E \\ & \text{ und } \bar{g}(y, 1) := pr_2 \circ h(y), & y \in f_1^*E \\ g: A \rightarrow B & \text{ durch } g(b', 0) := f_0(b'), & b' \in B' \\ & \text{ und } g(b', 1) := f_1(b'), & b' \in B' \end{aligned}$$

Nach (4.2) existieren Fortsetzungen  $\bar{g}': E'' \rightarrow E$  von  $\bar{g}: p''^{-1}(A) \rightarrow E$  und  $g': B'' \rightarrow B$  von  $g: A \rightarrow B$  mit  $p \circ \bar{g}' = g' \circ p'': E'' \rightarrow B$ .

$g': B'' \rightarrow B$  induziert somit die gesuchte Homotopie zwischen  $f_0: B' \rightarrow B$  und  $f_1: B' \rightarrow B$ .

□

**4.4 Definition.** Ein Prinzipal-G-Bündel  $p: E \rightarrow B$  heißt *universell*, falls  $E$  wegzusammenhängend und  $\pi_i(E, 0) = 0 \forall i \geq 1$  ist.

**4.5 Satz.** Sei  $p: E \rightarrow B$  ein universelles Prinzipal-G-Bündel mit Operation  $\nu: E \times G \rightarrow E$  und  $(X, A)$  ein relativer CW-Komplex. Ferner seien ein Prinzipal-G-Bündel  $p': X' \rightarrow X$  mit Operation  $\nu': X' \times G \rightarrow X'$  und eine Prinzipal-G-Bündel-Abbildung  $(\bar{h}: p'^{-1}(A) \rightarrow E, h: A \rightarrow B)$  gegeben.

Dann existieren Fortsetzungen  $\bar{h}': X' \rightarrow E$  von  $\bar{h}: p'^{-1}(A) \rightarrow E$  und  $h': X \rightarrow B$  von  $h: A \rightarrow B$ , sodass  $(\bar{h}': X' \rightarrow E, h': X \rightarrow B)$  eine Prinzipal-G-Bündel-Abbildung ist.

**4.6 Satz.** Seien ein universelles Prinzipal-G-Bündel  $p: E \rightarrow B$  und ein CW-Komplex  $B'$  gegeben. Dann gilt:

(a) Zu jedem Prinzipal-G-Bündel  $p': E' \rightarrow B'$  existiert eine Abbildung  $f: B' \rightarrow B$ , sodass  $p': E' \rightarrow B'$  und  $f^*p: f^*E \rightarrow B'$  äquivalent sind.

$f: B' \rightarrow B$  heißt klassifizierende Abbildung von  $p': E' \rightarrow B'$ .

(b) Seien  $f_0, f_1: B' \rightarrow B$  Abbildungen, sodass  $f_0^*p: f_0^*E \rightarrow B'$  und  $f_1^*p: f_1^*E \rightarrow B'$  äquivalent sind. Dann sind  $f_0: B' \rightarrow B$  und  $f_1: B' \rightarrow B$  homotop.

Die Beweise dieser beiden Sätze verlaufen analog zu denen von (4.2) und (4.3). Sie werden deshalb hier nicht näher ausgeführt.

Zusammen mit den Ergebnissen aus §3, insbesondere von (3.22(c)), (3.39), (3.54) und (3.58) erhält man somit eine Bijektion zwischen  $LF(B)$ ,  $(LF_G(B))$  und  $[B, B']$ , wobei  $B'$  der Basisraum einer universellen Prinzipal-H(F)-Quasifaserung (eines universellen Prinzipal-G-Bündels) sei, falls  $B$  ein CW-Komplex ist.

Es soll nun zu jedem assoziativen topologischen Monoid  $M$  ein klassifizierender Raum  $BM$  konstruiert und gezeigt werden, dass  $BM$  Basisraum einer universellen Prinzipal- $M$ -Quasifaserung (eines universellen Prinzipal- $M$ -Bündels) ist, falls  $M$  eine assoziative  $H$ -Gruppe (eine topologische Gruppe) ist, falls  $(M, \{1_M\})$  ein NDR ist. Somit existiert zu jedem endlichen CW-Komplex  $F$  eine universelle Prinzipal- $H(F)$ -Quasifaserung bzw. ein universelles Prinzipal- $G$ -Bündel,  $g \subset Top(F)$ .

#### 4.7 Definition.

- (a)  $\sigma^i := \{(t_1, \dots, t_i) \in R^i \mid 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_i \leq 1\}$ ;  $\sigma^0 := 0$   
 $\hat{\sigma}^i := \{(t_1, \dots, t_i) \in R^i \mid 0 < t_1 < \dots < t_i < 1\}$   
 $\dot{\sigma}^i := \sigma^i - \hat{\sigma}^i$
- (b) Sei  $(M, \mu)$  ein assoziativer topologischer Monoid. Definiere  $A^i M$  als die disjunkte Vereinigung aller  $M \times \sigma^i \times M^j$ ,  $0 \leq j \leq i$ , wobei  $M^j$  das  $j$ -fache kartesische Produkt von  $M$  sei.
- (c) Sei  $E^i M$  der Raum, der aus  $A^i M$  entsteht, wenn man folgende Identifikationen vornimmt und die so entstehende Menge mit der Quotiententopologie versieht:
- (1) Identifiziere  $(m, t_1, \dots, t_j, m_1, \dots, m_j)$  mit  $(\mu(m, m_1), t_2, \dots, t_j, m_2, \dots, m_j)$ , falls  $t_1 = 0$  ist.
  - (2) Identifiziere  $(m, t_1, \dots, t_j, m_1, \dots, m_j)$  mit  $(m, t_1, \dots, t_{k-1}, t_{k+1}, \dots, t_j, m_1, \dots, m_{k-1}, \mu(m_k, m_{k+1}), m_{k+2}, \dots, m_j)$ , falls  $t_k = t_{k+1}$  ist,  $1 \leq k < j$ .
  - (3) Identifiziere  $(m, t_1, \dots, t_j, m_1, \dots, m_j)$  mit  $(m, t_1, \dots, t_{j-1}, m_1, \dots, m_{j-1})$ , falls  $t_j = 1$  ist.
  - (4) Identifiziere  $(m, t_1, \dots, t_j, m_1, \dots, m_j)$  mit  $(m, t_1, \dots, t_{k-1}, t_{k+1}, \dots, t_j, m_1, \dots, m_{k-1}, m_{k+1}, \dots, m_j)$ , falls  $m_k = 1_M$  ist,  $1 \leq k \leq j$ .

#### 4.8 Satz.

- (a)  $E^i M \subset E^{i+1} M \forall i \geq 0$   
(b)  $E^i M$  ist in  $E^{i+1} M$  zusammenziehbar für alle  $i \geq 0$ .

*Beweis.*

- (a) Definiere eine Abbildung  $e: A^i M \rightarrow A^{i+1} M$  durch  $(m, t_1, \dots, t_j, m_1, \dots, m_j) \rightarrow (1_M, 0, t_1, \dots, t_j, m, m_1, \dots, m_j)$ . Man prüft leicht nach, dass diese Abbildung die Identifikationen (1)-(4) aus (4.7(c)) respektiert. Also induziert  $e: A^i M \rightarrow A^{i+1} M$  wegen (4.7(c)(1)) eine Inklusion  $E^i M \rightarrow E^{i+1} M$ .
- (b) Definiere eine Abbildung  $H: A^i M \times I \rightarrow A^{i+1} M$  durch  $(m, t_1, \dots, t_j, m_1, \dots, m_j) \rightarrow (t_M, t, \min(1, t+t_1), \dots, \min(1, t+t_j), m, m_1, \dots, m_j)$ . Auch hier prüft man leicht nach, dass diese Abbildung die Identifikationen (1)-(4) aus (4.7(c)) erhalten bleiben. Also induziert  $H: A^i M \times I \rightarrow A^{i+1} M$  eine Homotopie von der Inklusion  $E^i M \rightarrow E^{i+1} M$  zu der konstanten Abbildung  $c: E^i M \rightarrow E^{i+1} M, (m, t_1, \dots, t_j, m_1, \dots, m_j) \rightarrow 1_M$ , d.h.  $E^i M$  ist in  $E^{i+1} M$  zusammenziehbar.

□

**4.9 Definition.**  $EM$  sei die Vereinigung aller  $E^i M, i \geq 0$ , versehen mit der schwachen Topologie.

**4.10 Korollar.**  $EM$  ist zusammenziehbar, d.h.  $EM$  ist wegzusammenhängend und  $\pi_r(EM, 1_M) = 0 \forall r \geq 1$ .

**4.11 Definition.** Sei  $\bar{A}^i M := \{(m, t_1, \dots, t_j, m_1, \dots, m_j) \in A^i M \mid m = 1_M\}$  und  $B^i M$  der Raum, der aus  $\bar{A}^i M$  entsteht, wenn man folgende Identifikationen vornimmt, versehen mit der Quotiententopologie:

- (1) Identifiziere  $(1_M, t_1, \dots, t_j, m_1, \dots, m_j)$  mit  $(1_M, t_2, \dots, t_j, m_2, \dots, m_j)$ , falls  $t_1 = 0$  ist.
- (2) Identifiziere  $(1_M, t_1, \dots, t_j, m_1, \dots, m_j)$  mit  $(1_M, t_1, \dots, t_{k-1}, t_{k+1}, \dots, t_j, m_1, \dots, m_{k-1}, \mu(m_k, m_{k+1}), m_{k+2}, \dots, m_j)$ , falls  $t_k = t_{k+1}$  ist,  $1 \leq k < j$ .
- (3) Identifiziere  $(1_M, t_1, \dots, t_j, m_1, \dots, m_j)$  mit  $(1_M, t_1, \dots, t_{j-1}, m_1, \dots, m_{j-1})$ , falls  $t_j = 1$  ist.
- (4) Identifiziere  $(1_M, t_1, \dots, t_j, m_1, \dots, m_j)$  mit  $(1_M, t_1, \dots, t_{k-1}, t_{k+1}, \dots, t_j, m_1, \dots, m_{k-1}, m_{k+1}, \dots, m_j)$ , falls  $m_k = 1_M$  ist,  $1 \leq k \leq j$ .

**4.12 Satz.** Die Zuordnung  $\bar{\rho}^i: A^i M \rightarrow \bar{A}^i M, (m, t_1, \dots, t_j, m_1, \dots, m_j) \rightarrow (1_M, t_1, \dots, t_j, m_1, \dots, m_j)$ , induziert eine surjektive Abbildung  $\rho^i: E^i M \rightarrow B^i M \forall i \geq 0$ .

*Beweis.* Die Zuordnung  $\bar{\rho}^i: A^i M \rightarrow \bar{A}^i M$  respektiert offensichtlich die beim Übergang zu  $\rho^i: E^i M \rightarrow B^i M$  auftretenden Identifikationen.

Sei  $(1_M, t_1, \dots, t_j, m_1, \dots, m_j) \in B^i M$  beliebig. Dann gilt  $\rho^i(m, t_1, \dots, t_j, m_1, \dots, m_j) = (1_M, t_1, \dots, t_j, m_1, \dots, m_j) \forall m \in M$ . Also ist  $\rho^i: E^i M \rightarrow B^i M$  surjektiv.  $\square$

**4.13 Definition.** Ein topologisches Paar  $(X, A)$  mit Basispunkt  $x_0 \in A$  heißt *Umgebungsdeformationsretrakt (NDR)*, falls eine offene Umgebung  $U$  von  $A$  und eine Homotopie  $h_t: (X, x_0) \rightarrow (X, x_0)$  existieren, sodass gilt:

$$\begin{aligned} h_0 &= id_X: (X, x_0) \rightarrow (X, x_0), \\ h_t(x) &\in U \quad \forall x \in U, t \in I, \\ h_1(x) &\in A \quad \forall x \in U. \end{aligned}$$

**4.14 Satz.** Sei ein zusammenhängender assoziativer topologischer Monoid  $(M, \mu)$  gegeben, sodass  $(M, \{1_M\})$  ein NDR ist. Dann ist  $\rho^i: E^i M \rightarrow B^i M$  für alle  $i \geq 0$  eine Quasifaserung.

*Beweis.* Der Beweis erfolgt induktiv:

$$E^0 M = M, B^0 M = \{1_M\} \Rightarrow \rho^0: E^0 M \rightarrow B^0 M \text{ ist eine Quasifaserung.}$$

Sei nun  $\rho^k: E^k M \rightarrow B^k M$  für alle  $k \leq i$  eine Quasifaserung. Da  $(M, \{1_M\})$  ein NDR ist, existieren eine offene Umgebung  $U$  von  $\{1_M\}$  und eine Homotopie  $h_t: M \rightarrow M$  mit  $h_0 = id_M: M \rightarrow M, h_t(m) \in U \forall m \in U, t \in I$  und  $h_1(m) = \{1_M\} \forall m \in U$ .

Sei  $\bar{h}_t: U \rightarrow U$  die durch  $h_t: M \rightarrow M$  definierte Homotopie und  $V^j, j \geq 1$ , der aus  $M \times \bar{\sigma}^j \times (M - 1_M)^{j-1} \times U$  durch die Identifikationen (1)-(4) in (4.7) entstehende Raum, versehen mit der Quotiententopologie,  $V^0 := M$ . Dann gilt:

(i)  $V^j$  ist offen in  $E^j M \forall j \geq 0$

(ii)  $E^j M - E^{j-1} M \subset V^{j+1} \forall j \geq 0$  mit  $E^{-1} M := \emptyset$ :

Sei  $(m, t_1, \dots, t_l, m_1, \dots, m_l) \in E^j M - E^{j-1} M$ .

Dann gilt  $l = j, 0 < t_1 < \dots < t_l < 1$  und  $m_k \neq 1_M$  für  $1 \leq k \leq l$ .

Somit ist  $(m, t_1, \dots, t_l, m_1, \dots, m_l) = (m, t_1, \dots, t_l, \frac{t_l+1}{2}, m_1, \dots, m_l, 1_M) \in V^{j+1}$ .

Sei  $V := \bigcup_{j=0}^{i+1} V^j$ . Dann ist  $V$  als Vereinigung offener Mengen offen in  $E^{i+1} M$  und es gilt:

(iii)  $V = E^i M \cup V^{i+1}$ :

$$\begin{aligned} E^i M \cup V^{i+1} &= \bigcup_{j=0}^i (E^j M - E^{j-1} M) \cup V^{i+1} = M \cup \bigcup_{j=0}^i (E^j M - E^{j-1} M) \cup V^{i+1} \\ &\subset M \cup \bigcup_{j=0}^i V^{j+1} \cup V^{i+1} = \bigcup_{j=0}^{i+1} V^j \\ &= V = \bigcup_{j=0}^i V^{j+1} \cup V^{i+1} \\ &\subset \bigcup_{j=0}^i E^j M \cup V^{i+1} \\ &= E^i M \cup V^{i+1} \end{aligned}$$

Somit ist  $id_{E^i M} \times \bar{h}_t: V \rightarrow V$  eine Homotopie mit

$$id_{E^i M} \times \bar{h}_0 = id_V: V \rightarrow V,$$

$$id_{E^i M} \times \bar{h}_t(e) \in E^i M \forall e \in E^i M, t \in I, \text{ und}$$

$$id_{E^i M} \times \bar{h}_1(e) \in E^i M \forall e \in V.$$

Sei  $W := \rho^{i+1}(V)$  und  $id_{B^i M} \times h'_t: W \rightarrow W$  die induzierte Homotopie. Offensichtlich ist dann auch  $W$  offen und es gilt:

$$id_{B^i M} \times h'_0 = id_W: W \rightarrow W,$$

$$id_{B^i M} \times h'_t(b) \in B^i M \forall b \in B^i M, t \in I,$$

$$id_{B^i M} \times h'_1(b) \in B^i M \forall b \in B^i M \text{ und}$$

$$\rho^{i+1} \circ (id_{E^i M} \times \bar{h}_t) = (id_{B^i M} \times h'_t) \circ \rho^{i+1}: V \rightarrow V \forall t \in I.$$

Aus der letzten Eigenschaft folgt, da  $M$  zusammenhängend ist, dass  $(id_{E^i M} \times \bar{h}_1)_*$ :  $\pi_n((\rho^{i+1})^{-1}(b), e) \rightarrow \pi_n((\rho^{i+1})^{-1} \circ (id_{B^i M} \times h'_1)(b), id_{E^i M} \times \bar{h}_1(e)) \forall n \geq 1, b \in W$  und  $e \in (\rho^{i+1})^{-1}(b)$  ein Isomorphismus ist, denn  $id_{B^i M} \times h'_t(b)$  definiert einen Weg von  $b$  nach  $id_{B^i M} \times h'_1(b)$ . Somit ist  $\rho^{i+1}: V \rightarrow W$  wegen (3.7) eine Quasifaserung. Außerdem ist  $W \cap (B^{i+1} M - B^i M)$  offen und  $W \cap (B^{i+1} M - B^i M) \subset B^{i+1} M - B^i M$ . Also ist auch  $\rho^{i+1}: (\rho^{i+1})^{-1}(W \cap (B^{i+1} M - B^i M)) \rightarrow W \cap (B^{i+1} M - B^i M)$  eine Quasifaserung. Somit ist  $\rho^{i+1}: E^{i+1} M \rightarrow B^{i+1} M$  wegen  $(\rho^{i+1})^{-1}(W \cap (B^{i+1} M - B^i M)) = V \cap (E^{i+1} M - E^i M)$  und wegen (3.6) eine Quasifaserung.  $\square$

**4.15 Satz.** Sei ein zusammenhängender assoziativer topologischer Monoid  $(M, \mu)$  gegeben, sodass  $(M, \{1_M\})$  ein NDR ist. Dann ist  $\rho: EM \rightarrow BM := \bigcup_{i \geq 0} B^i M$ , definiert durch die  $\rho^i: E^i M \rightarrow B^i M$ , eine Quasifaserung.

*Beweis.* Da die Zuordnung  $\bar{e}: \bar{A}^i M \rightarrow \bar{A}^{i+1} M, (1_m, t_1, \dots, t_j, m_1, \dots, m_j) \rightarrow (1_m, 0, t_1, \dots, t_j, 1_M, m_1, \dots, m_j)$ , die Identifikationen (1)-(4) aus (4.11) respektiert,

induziert sie eine Inklusion  $B^i M \rightarrow B^{i+1} M$ . Die Aussage des Satzes folgt nun mit (3.10).  $\square$

**4.16 Satz.** *Sei eine zusammenhängende assoziative  $H$ -Gruppe  $(M, \mu)$  mit Inversenabbildung  $\iota: M \rightarrow M$  gegeben, sodass  $(M, \{1_M\})$  ein NDR ist. Dann ist  $\rho: EM \rightarrow BM$  eine Prinzipal- $M$ -Quasifaserung.*

*Beweis.* Sei die Operation  $\nu: EM \times M \rightarrow EM$  die durch  $A^i M \times M \rightarrow A^i M$ ,  $((m, t_1, \dots, t_j, m_1, \dots, m_j), m') \rightarrow (\mu(\iota(m'), m), t_1, \dots, t_j, m_1, \dots, m_j)$ , induzierte Abbildung. Man prüft leicht nach, dass  $\nu: EM \times M \rightarrow EM$  wohldefiniert ist und es gilt:

$$\begin{aligned} \nu((m, t_1, \dots, t_j, m_1, \dots, m_j), 1_M) &= (m, t_1, \dots, t_j, m_1, \dots, m_j) \\ \nu(\nu((m, t_1, \dots, t_j, m_1, \dots, m_j), m'), m'') &= (\mu(\iota(m''), \mu(\iota(m'), m)), t_1, \dots, t_j, m_1, \dots, m_j) \\ &= (\mu(\mu(\iota(m''), \iota(m')), m), t_1, \dots, t_j, m_1, \dots, m_j) \\ &= (\mu(\iota(\mu(m', m'')), m), t_1, \dots, t_j, m_1, \dots, m_j) \\ &= \nu((m, t_1, \dots, t_j, m_1, \dots, m_j), \mu(m', m'')) \\ \rho(\nu((m, t_1, \dots, t_j, m_1, \dots, m_j), m')) &= \rho(m, t_1, \dots, t_j, m_1, \dots, m_j) \end{aligned}$$

$\nu(e, \cdot): M \rightarrow \rho^{-1}(\rho(e))$  ist wegen (1.15) für alle  $e \in EM$  eine schwache Homotopieäquivalenz.  $\square$

**4.17 Satz.** *Sei eine zusammenhängende topologische Gruppe  $(G, \mu)$  gegeben, sodass  $(G, \{1_G\})$  ein NDR ist. Dann ist  $\rho: EG \rightarrow BG$  ein Prinzipal- $G$ -Bündel.*

*Beweis.* Nach (4.16) ist  $\rho: EG \rightarrow BG$  eine Prinzipal- $G$ -Quasifaserung mit Operation  $\nu: EG \times G \rightarrow EG$ , für die wegen (1.15) gilt, dass  $\nu(e, \cdot): G \rightarrow \rho^{-1}(\rho(e))$  für alle  $e \in EG$  ein Homöomorphismus ist.

Da  $(G, \{1_G\})$  ein NDR ist, existiert eine offene Umgebung  $U$  von  $1_G$  und eine Homotopie  $h_t: G \rightarrow G$  mit  $h_0 = id_G: G \rightarrow G$ ,  $h_t(g) \in U \forall g \in U, t \in I$  und  $h_1(g) = 1_G \forall g \in U$ .

Sei  $V_j$  der aus  $\{1_G\} \times \delta^j \times (G - \{1_G\})^{j-1} \times U$  durch die Identifikationen (1)-(4) aus (4.11) entstehende Raum, versehen mit der Quotiententopologie,  $V_0 := G$ . Dann gilt:

- (i)  $V_j$  ist offen in  $B^j G$  und somit in  $BG$ .
- (ii)  $B^j G - B^{j-1} G \subset V_j$ :  
 $(1_G, t_1, \dots, t_k, g_1, \dots, g_k) \in B^j G - B^{j-1} G$   
 $\Rightarrow k = j, (t_1, \dots, t_k) \in \delta^k$  und  $g_i \in G - \{1_G\}$  für  $1 \leq i \leq k$ .  
 $\Rightarrow (1_G, t_1, \dots, t_k, g_1, \dots, g_k) = (1_G, t_1, \dots, t_k, \frac{t_k+1}{2}, g_1, \dots, g_k, 1_G) \in V_{j+1}$
- (iii)  $B^0 G \subset V_1$ :  
 $1_G = (1_G, \frac{1}{2}, 1_G) - V_1$

Somit gilt:  $BG = \bigcup_{j \geq 1} (B^j G - B^{j-1} G) \cup B^0 G \subset \bigcup_{j \geq 1} V_j \subset \bigcup_{j \geq 1} B^j G = BG$ , d.h.  $\bigcup_{j \geq 1} V_j = BG$ .

Definiere nun Funktionen  $\phi_j: V_j \times G \rightarrow \rho^{-1}(V_j)$  durch  $((1_G, t_1, \dots, t_j, g_1, \dots, g_j), g) \rightarrow (\mu(\iota(g_j), g), t_1, \dots, t_j, g_1, \dots, g_j)$  und  $p_j: \rho^{-1}(V_j) \rightarrow G$  durch  $(g, t_1, \dots, t_j, g_1, \dots, g_j) \rightarrow \mu(g_j, g)$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} (\rho, p_j) \circ \phi_j((1_G, t_1, \dots, t_j, g_1, \dots, g_j), g) &= ((1_G, t_1, \dots, t_j, g_1, \dots, g_j), \mu(\mu(\iota(g_j), g_j), g)) \\ \phi_j \circ (\rho, p_j)(g, t_1, \dots, t_j, g_1, \dots, g_j) &= \mu(\mu(\iota(g_j), g_j), g), t_1, \dots, t_j, g_1, \dots, g_j) \end{aligned}$$

Also sind  $\phi_j: V_j \times G \rightarrow \rho^{-1}(V_j)$  und  $(\rho, p_j): \rho^{-1}(V_j) \rightarrow V_j \times G$  zueinander inverse Funktionen.

Offensichtlich gilt  $V_i \cap V_{i+1} = \{1_G\} \times \delta^i \times (G - \{1_G\})^{i-1} \times (U - \{1_G\})$ , versehen mit den entsprechenden Identifikationen, und  $V_i \cap V_j \neq \emptyset$  für  $j \in \{i-1, i, i+1\}$ . Definiere nun Funktionen  $f_i: V_i \cap V_{i+1} \rightarrow G$  durch  $(1_G, t_1, \dots, t_i, g_1, \dots, g_i) \rightarrow g_i$ . Dann gilt für alle  $(1_G, t_1, \dots, t_i, g_1, \dots, g_i) \in V_i \cap V_{i+1}$ :

$$\begin{aligned} \phi_i^{-1} \circ \phi_{i+1}((1_G, t_1, \dots, t_i, g_1, \dots, g_i), g) &= \phi_i^{-1} \circ \phi_{i+1}((1_G, t_1, \dots, t_i, \frac{t_i+1}{2}, g_1, \dots, g_i, 1_G), g) \\ &= \phi_i^{-1}(g, t_1, \dots, t_i, \frac{t_i+1}{2}, g_1, \dots, g_i, 1_G) \\ &= ((1_G, t_1, \dots, t_i, g_1, \dots, g_i), \mu(g_i, g)) \\ &= ((1_G, t_1, \dots, t_i, g_1, \dots, g_i), \mu(f_i(1_G, t_1, \dots, t_i, g_1, \dots, g_i), g)) \end{aligned}$$

Es bleibt nun noch zu zeigen, dass die Funktionen  $\phi_j: V_j \times G \rightarrow \rho^{-1}(V_j)$ ,  $(\rho, p_j): \rho^{-1}(V_j) \rightarrow V_j \times G$  und  $f_i: V_i \cap V_{i+1} \rightarrow G$  stetig sind.

Die Stetigkeit von  $p_j: \rho^{-1}(V_j) \rightarrow G$  folgt sofort aus Quotiententopologie von  $\rho^{-1}(V_j)$  und der Stetigkeit von  $\mu: G \times G \rightarrow G$ . Da auch  $\rho: EG \rightarrow BG$  stetig ist, ist  $(\rho, p_j): \rho^{-1}(V_j) \rightarrow V_j \times G$  stetig.

Wegen  $\phi_j(\rho(g, t_1, \dots, t_j, g_1, \dots, g_j), 1_G) = \mu((g, t_1, \dots, t_j, g_1, \dots, g_j), \iota(p_j(g, t_1, \dots, t_j, g_1, \dots, g_j)))$  ist  $\phi_j(\cdot, 1_G): V_j \times \{1_G\} \rightarrow \rho^{-1}(V_j)$  stetig.

Wegen  $\phi_j((1_G, t_1, \dots, t_j, g_1, \dots, g_j), g) = \nu(\phi_j((1_G, t_1, \dots, t_j, g_1, \dots, g_j), 1_G), g)$  ist dann auch  $\phi_j: V_j \times G \rightarrow \rho^{-1}(V_j)$  stetig.

Schließlich ist wegen  $f_i(1_G, t_1, \dots, t_i, g_1, \dots, g_i) =$

$p_i \circ \phi_{i+1}((1_G, t_1, \dots, t_i, \frac{t_i+1}{2}, g_1, \dots, g_i, 1_G), 1_G)$  auch  $f_i: V_i \cap V_{i+1} \rightarrow G$  stetig.  $\square$

Es sei an dieser Stellen noch darauf hingewiesen, dass man in (4.14)-(4.17) die Voraussetzung, dass  $(M, \{1_M\})$  ein NDR ist, durch folgende Voraussetzung ersetzen kann: Es existiert eine offene Umgebung  $U$  von  $1_M$  und eine Homotopie  $h_t: U \rightarrow U$  mit  $h_0 = id_U: U \rightarrow U$  und  $h_1(m) = 1_M \forall m \in U$ . Dies geht aus den Beweisen hervor.

**4.18 Korollar.** Sei  $F$  ein endlicher CW-Komplex. Dann gilt:

- (a)  $\rho: EH(F) \rightarrow BH(F)$  ist eine universelle Prinzipal- $H(F)$ -Quasifaserung.
- (b)  $\rho: EG \rightarrow BG$  ist für alle  $G \subset Top(F)$  ein universelles Prinzipal- $G$ -Bündel.

*Beweis.* Siehe die Bemerkung (3) im Anschluss an (1.14).  $\square$

**4.19 Satz.** Sei  $(G, \mu)$  eine topologische Gruppe mit Inversenabbildung  $\iota: G \rightarrow G$ . Dann ist auch  $BG$  eine topologische Gruppe.

*Beweis.* Sei  $(1_G, t_1, \dots, t_j, g_1, \dots, g_j) \in B^j G - B^{j-1} G$  und  $(1_G, t'_1, \dots, t'_k, g'_1, \dots, g'_k) \in B^k G - B^{k-1} G$ . Definiere nun  $\bar{\mu}: Bg \times BG \rightarrow BG$  wie folgt:

Ordne zunächst die  $t_1, \dots, t_j, t'_1, \dots, t'_k$  so zu einem  $(j+k)$ -Tupel  $(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_{j+k})$ , dass  $(\bar{t}_1 \leq \dots \leq \bar{t}_{j+k})$  gilt.

Ordne dann die  $g_1, \dots, g_j, g'_1, \dots, g'_k$  so zu einem  $(j+k)$ -Tupel  $(\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_{j+k})$  an, dass gilt:

- Falls  $\bar{t}_\lambda = \bar{t}_{\lambda+1} = t_i = t'_i$ , so sei  $\bar{g}_{\lambda+1} := g'_i$ .
- Falls  $\bar{t}_\lambda \neq \bar{t}_{\lambda+1}$  und  $\bar{t}_\lambda = t_i$ , so sei  $\bar{g}_\lambda := g_i$ .
- Falls  $\bar{t}_\lambda \neq \bar{t}_{\lambda+1}$  und  $\bar{t}_\lambda = t'_i$ , so sei  $\bar{g}_\lambda := g'_i$ .

Definiere nun  $\bar{\mu}: Bg \times BG \rightarrow BG$  durch  $((1_G, t_1, \dots, t_j, g_1, \dots, g_j), (1_G, t'_1, \dots, t'_k, g'_1, \dots, g'_k)) \rightarrow (1_G, \bar{t}_1, \dots, \bar{t}_{j+k}, \bar{g}_1, \dots, \bar{g}_{j+k})$ . Man prüft nun leicht nach, dass  $(BG, \bar{\mu})$  eine topologische



Gruppe mit Inversenabbildung  $\bar{\iota}: BG \rightarrow BG, (1_G, t_1, \dots, t_j, g_1, \dots, g_j) \rightarrow (1_G, t_1, \dots, t_j, \iota(g_1), \dots, \iota(g_j))$ , ist.  $\square$

**4.20 Satz.** Seien  $M, M_0$  zwei assoziative topologische Monoide und  $i: M_0 \rightarrow M$  eine Inklusion. Dann existiert auch eine Inklusion  $BM_0 \rightarrow BM$ .

*Beweis.* Offensichtlich wird durch die Zuordnung  $(1_{M_0}, t_1, \dots, t_j, m_1, \dots, m_j) \rightarrow (1_M, t_1, \dots, t_j, i(m_1), \dots, i(m_j))$  eine Abbildung  $BM_0 \rightarrow BM$  definiert, von der man leicht nachprüft, dass sie eine Inklusion ist.  $\square$

Ich werde nun kurz auf einige Folgerungen dieses Satzes eingehen, wozu auch der Begriff der *stabilen Faserhomotopieäquivalenz* gehört.

$F$  sei ein endlicher CW-Komplex. Offensichtlich ist dann auch  $SF$ , die *Suspension* von  $F$ , ein endlicher CW-Komplex und es existiert eine Inklusion  $H(F) \rightarrow H(SF)$ , indem man einer Abbildung  $f: F \rightarrow F$  die Abbildung  $Sf: SF \rightarrow SF, \langle t, y \rangle \rightarrow \langle t, f(y) \rangle$ , zuordnet.

Bezeichne nun den induktiven Limes von  $BH(F) \rightarrow BH(SF) \rightarrow \dots$  mit  $B_{H(F)}$ .  $B_{H(S^1)}$  werde kurz mit  $B_H$  bezeichnet.

**Definition.** Seien eine Faserung  $p: E \rightarrow B$  mit Faser  $F$  und klassifizierender Abbildung  $f: B \rightarrow BH(F)$  und eine Faserung  $p': E' \rightarrow B$  mit Faser  $S^k F$  und klassifizierender Abbildung  $f': B \rightarrow BH(S^k F)$  gegeben. Sie heißen *stabil faserhomotopieäquivalent*, falls die Abbildung  $f_\infty: B \rightarrow B_{H(F)}$ , definiert durch die Abbildung  $f: B \rightarrow BH(F)$ , und die Abbildung  $f'_\infty: B \rightarrow B_{H(F)}$ , definiert durch die Abbildung  $f': B \rightarrow BH(S^k F)$  homotop sind.

Eine zu  $B_{H(F)}$  analoge Konstruktion führt zu den Räumen  $B_{PL}$ , dem induktiven Limes von  $B_{PL_1} \rightarrow B_{PL_2} \rightarrow \dots$ , bzw. zu  $B_O$ , dem induktiven Limes von  $BO_1 \rightarrow BO_2 \rightarrow \dots$ . Da alle  $B_{PL_n}$  bzw.  $BO_n$ ,  $n \geq 1$ , topologische Gruppen sind, sind auch  $B_{PL}$  bzw.  $B_O$  topologische Gruppen.  $B_{PL}$  bzw.  $B_O$  klassifizieren PL- bzw. differenzierbare Vektorraumbündel bis auf Whitney-Summe mit einem trivialen Vektorraumbündel.

Offensichtlich existieren auch Inklusionen  $Bi: B_O \rightarrow B_H, Bi': B_O \rightarrow B_{PL}$  und  $Bi'': B_{PL} \rightarrow B_H$ . Sie werden auf die übliche Weise (s. (3.14)) als Faserungen betrachtet. Der Einfachheit halber werden die Faserungen wieder mit  $Bi: B_O \rightarrow B_H, Bi': B_O \rightarrow B_{PL}$  bzw.  $Bi'': B_{PL} \rightarrow B_H$  bezeichnet. Dabei ist zu beachten, dass in der Theorie der homotopietheoretischen Klassifikation von Prinzipal-M-Quasifaserungen bzw. Prinzipal-G-Bündeln die klassifizierenden Räume wegen (1.21) nur bis auf den Homotopietyp genau bestimmt werden brauchen. Für den nächsten Paragraphen ist es auch noch von großer Bedeutung, dass  $Bi': B_O \rightarrow B_{PL}$  die topologische Gruppe  $PL/O := \text{Kern}(Bi')$  als Faser hat.

Zum Abschluss dieses Paragraphen soll nun noch ein Hindernis gegen die Fortsetzung eines Schnittes definiert werden.

**4.21 Satz.** Gegeben sei eine Faserung  $p: E \rightarrow B$  und Abbildungen  $f: X \rightarrow B, g: X \rightarrow E$ , sodass  $f: X \rightarrow B$  und  $p \circ g: X \rightarrow B$  homotop sind. Dann existiert eine zu  $g: X \rightarrow E$  homotope Abbildung  $g': X \rightarrow E$  mit  $p \circ g' = f: X \rightarrow B$ .

*Beweis.* Sei  $H: X \times I \rightarrow B$  eine Abbildung, durch die eine Homotopie  $h_t: p \circ g \simeq f: X \rightarrow B$  definiert werde. Da  $p: E \rightarrow B$  eine Faserung ist, existiert dann ein Abbildung  $H': X \times I \rightarrow E$  mit  $H'(x, 0) = g(x) \forall x \in X$  und  $p \circ H' = H: X \times I \rightarrow B$ . Die Abbildung  $g': X \rightarrow E, x \rightarrow H'(x, 1)$ , ist dann homotop zu  $g: X \rightarrow E$  und es gilt  $p \circ g' = f: X \rightarrow B$ .  $\square$

**4.22 Definition.** Gegeben sei eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$ . Eine Abbildung  $g: Y \rightarrow X$  heißt *Schnitt*, falls  $f \circ g = id_Y: Y \rightarrow Y$  gilt.

**4.23 Satz.** Gegeben seien Abbildungen  $p: E \rightarrow B, f: X \rightarrow B$  und  $g: X \rightarrow E$  mit  $p \circ g = f: X \rightarrow B$ . Dann ist die Abbildung  $s: X \rightarrow f^*E, x \rightarrow (x, g(x))$ , ein Schnitt zu der Abbildung  $f^*p: f^*E \rightarrow X$ .

*Beweis.* Wegen  $p \circ g = f: X \rightarrow B$  ist  $s: X \rightarrow f^*E$  wohldefiniert und wegen  $f^*p \circ s(x) = f^*p(x, g(x)) = x \forall x \in X$  ist  $s: X \rightarrow f^*E$  ein Schnitt.  $\square$

**4.24 Satz.** Gegeben sei ein topologisches Paar  $(X, A)$  und Abbildungen  $p: E \rightarrow B, f: X \rightarrow B$  und  $g: A \rightarrow E$  mit  $p \circ g = f|_A: A \rightarrow B$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) Es existiert eine Abbildung  $h: X \rightarrow E$  mit

(i)  $h|_A = g: A \rightarrow E$

(ii)  $p \circ h = f: X \rightarrow B$

(2) Der durch  $x \rightarrow (x, g(x))$  definierte Schnitt  $s_A: A \rightarrow (f^*p)^{-1}(A)$  lässt sich zu einem Schnitt  $s_X: X \rightarrow f^*E$  fortsetzen.

*Beweis.*

(1)  $\Rightarrow$  (2) : Definiere  $s_X: X \rightarrow f^*E$  durch  $x \rightarrow (x, h(x))$ . Wegen  $p \circ g = f: X \rightarrow B$  ist  $s_X: X \rightarrow f^*E$  nach (4.23) ein Schnitt und es gilt:  $s_X(x) = (x, h(x)) = (x, g(x)) = s_A(x) \forall x \in A$ .

(2)  $\Rightarrow$  (1) : Wegen  $f^*E = \{(x, e) \in X \times E \mid f(x) = p(e)\}$  und wegen  $f^*p(x, e) = x \forall (x, e) \in X \times E$  muss ein Schnitt  $s_X: X \rightarrow f^*E$  von der Form  $x \rightarrow (x, h(x))$  für eine Abbildung  $h: X \rightarrow E$  mit  $p \circ h = f: X \rightarrow B$  sein. Für diese Abbildung  $h: X \rightarrow E$  gilt dann wegen  $s_X|_A = s_A: A \rightarrow (f^*p)^{-1}(A): h(x) = pr_E(s_X(x)) = pr_E(s_A(x)) = pr_2(x, g(x)) = g(x) \forall x \in A$ .

$\square$

Die nun folgende Definition eines Hindernisses gegen die Fortsetzung eines Schnittes wurde von H.J. Baues [1] übernommen:

**4.25 Definition.**

Voraussetzungen:

Gegeben sei ein CW-Komplex  $X$  der Dimension  $\leq n$  und  $C_f := X \cup_f e^n$  sei der Abbildungskegel bzgl. einer Abbildung  $f: S^{n-1} \rightarrow X$ ,  $F: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (C_f, X)$  die charakteristische Abbildung der  $n$ -Zelle.  $p: \overline{C}_f \rightarrow C_f$  sei eine Faserung mit Faser  $Y$ ,  $\bar{X} := p^{-1}(X)$  und  $s_X: X \rightarrow \bar{X}$  ein Schnitt bzgl.  $p|_{\bar{X}}: \bar{X} \rightarrow X$ .

Einige leichte Folgerungen:

Betrachte folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 & & \pi_{n-1}(Y) \\
 & & \downarrow i_* \\
 \pi_n(\overline{C}_f, \bar{X}) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(\bar{X}) \\
 p_* \downarrow \cong & & s_{X*} \uparrow (p|_{\bar{X}})_* \\
 \pi_n(C_f, X) & \xrightarrow{\partial} & \pi_n(X)
 \end{array}$$

Wegen  $(p|_{\bar{X}})_* \circ s_{X*} = id_{X*}: \pi_{n-1}(X) \rightarrow \pi_{n-1}(X)$  spaltet die exakte Faserhomotopiesequenz von  $p|_{\bar{X}}: \bar{X} \rightarrow X$ . Somit ist der Homomorphismus  $i_*: \pi_{n-1}(Y) \rightarrow \pi_{n-1}(\bar{X})$  injektiv.

Ferner gilt wegen der Kommutativität des Diagramms:

$$\begin{aligned}
 (p|_{\bar{X}})_*(s_{X*}[f] - \partial[F]) &= (p|_{\bar{X}})_*(s_{X*}[f]) - (p|_{\bar{X}})_*(\partial[F]) \\
 &= [f] - \partial(p_*[F]) \\
 &= [f] - \partial[F] \\
 &= [f] - [f] \\
 &= 0, \quad \text{wobei } \overline{[F]} := p_*^{-1}[F] \text{ sei.}
 \end{aligned}$$

Definition:

Das Element  $f^\dagger(s_X) := i_*^{-1}(s_{X*}[f] - \partial[\overline{[F]}]) \in \pi_{n-1}(Y)$  ist wohldefiniert.

**4.26 Satz.** *Seien die Voraussetzungen von (4.25) gegeb. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (1)  $s_X: X \rightarrow \bar{X}$  lässt sich zu einem Schnitt  $s: C_f \rightarrow \overline{C}_f$  fortsetzen.
- (2)  $f^\dagger(s_X) = 0$ .

*Beweis.*

(1)  $\Rightarrow$  (2) : Sei  $s_X: X \rightarrow \bar{X}$  ein Schnitt mit  $s|_X = s_X: X \rightarrow \bar{X}$ . Dann ist  $\overline{[F]} = s_*[F]$  und es gilt:

$$\begin{aligned}
 f^\dagger(s_X) &= i_*^{-1}(s_{X*}[f] - \partial(s_*[F])) \\
 &= i_*^{-1}(s_{X*}[f] - s_*(\partial([F]))) \\
 &= i_*^{-1}(s_{X*}[f] - s_*[f]) \\
 &= i_*^{-1}(s_{X*}[f] - s_{X*}[f]) \\
 &= i_*^{-1}(0) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

(2)  $\Rightarrow$  (1) : Die Homotopieklasse  $\overline{[F]}$  kann durch eine Abbildung  $\bar{F}: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (\overline{C}_f, \bar{X})$  repräsentiert werden, sodass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
& & (\overline{C_f}, \overline{X}) \\
& \nearrow \overline{F} & \downarrow p \\
(D^n, S^{n-1}) & \xrightarrow{F} & (C_f, X)
\end{array}$$

Wegen  $f^\dagger(s_X) = 0$  gilt  $\partial[\overline{F}] = s_{X*}[f]$ . Also existiert eine Homotopie  $h_t: s_X \circ f \simeq \overline{F}|_{S^{n-1}}: S^{n-1} \rightarrow \overline{X}$ . Definiere mit Hilfe dieser Homotopie eine Abbildung  $\overline{s}: C_f = X \cup_f CS^{n-1} \rightarrow \overline{C_f}$  durch  $\overline{s}(x) := s_X(x) \forall x \in X$ ,

$$\overline{s}\langle t, v \rangle := \begin{cases} h_{2t}(v), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, v \in S^{n-1} \\ \overline{F}\langle 2t-1, v \rangle, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, v \in S^{n-1}. \end{cases}$$

Wegen  $p|_X \circ s_X = id_X: X \rightarrow X$  existiert eine Homotopie  $h'_t: p \circ \overline{s} \simeq id_{C_f}: C_f \rightarrow C_f \text{ rel } X$ , durch die eine Abbildung  $H': C_f \times I \rightarrow C_f$  definiert wird. Für diese Abbildung ergibt sich folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
C_f \cup (X \times I) & \xrightarrow{\overline{s} \cup (s_X \circ pr_1)} & \overline{C_f} \\
\downarrow & & \downarrow p \\
C_f \times I & \xrightarrow{H'} & C_f
\end{array}$$

Da  $p: \overline{C_f} \rightarrow C_f$  eine Faserung ist, existiert eine Abbildung  $H'': C_f \times I \rightarrow \overline{C_f}$ , die das Diagramm kommutativ ergänzt. Für die Abbildung  $s: C_f \rightarrow \overline{C_f}$ ,  $s(z) := H''(z, 1) \forall z \in C_f$ , gilt dann:  $s|_X = s_X: X \rightarrow \overline{X}$ ,  $p \circ s = id_{C_f}: C_f \rightarrow C_f$ .

Also ist  $s: C_f \rightarrow \overline{C_f}$  ein Schnitt, der den Schnitt  $s_X: X \rightarrow \overline{X}$  fortsetzt.

□

**4.27 Korollar.** Gegeben sei ein CW-Komplex  $X$  der Dimension  $\leq n$  und  $C_f := X \cup_f e^n$  sei der Abbildungskegel bzgl. einer Abbildung  $f: S^{n-1} \rightarrow X$ . Ferner seien eine Faserung  $p: E \rightarrow B$  mit Faser  $Y$  und Abbildungen  $g: C_f \rightarrow B, g_0: X \rightarrow E$  mit  $p \circ g_0 \simeq g|_X: X \rightarrow B$  gegeben. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) Es existiert eine Abbildung  $g': C_f \rightarrow E$  mit

(i)  $p \circ g' = g: C_f \rightarrow B$

(ii)  $g'|_X = g'_0: X \rightarrow E$ , wobei  $g'_0: X \rightarrow E$  die zu  $g_0: X \rightarrow E$  homotope Abbildung entsprechend (4.21) sei.

(2)  $f^\dagger(s) = 0 \in \pi_{n-1}(Y)$ , wobei  $s: X \rightarrow (f^*p)^{-1}(X)$  durch  $x \rightarrow (x, g'_0(x))$  definiert sei.

## 5 Poincaré-Räume

In diesem Paragraphen werde ich zunächst die Poincaré-Räume definieren und einige ihrer Eigenschaften aufführen, die meisten, ohne sie zu beweisen. Anschließend wird das in (4.25) definierte Hindernis benutzt, um eine Bedingung dafür herzuleiten, ob ein einfach zusammenhängender Poincaré-Komplex vom Homotopietyp einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit ist, d.h. ob er "glatt" ist.

### 5.1 Definition.

- (a) Ein endliches CW-Paar  $(P, P')$  heißt *Poincaré-Paar* der formalen Dimension  $n$ , falls gilt:
  - (i)  $H_n(P, P') \cong \mathbb{Z}$  mit erzeugendem Element  $[P]$ .
  - (ii)  $\cap[P]: H^q(P) \rightarrow H_{n-q}(P, P')$  ist für alle  $q$  ein Isomorphismus.
  - (iii)  $\cap[P]: H^q(P, P') \rightarrow H_{n-q}(P)$  ist für alle  $q$  ein Isomorphismus.
- (b) Ein endlicher CW-Komplex  $P$  heißt *Poincaré-Komplex* der formalen Dimension  $n$ , falls  $(P, \emptyset)$  ein Poincaré-Paar der formalen Dimension  $n$  ist.

Zu dieser Definition sei noch darauf hingewiesen, das W. Browder in [3] gezeigt hat, dass die Bedingungen (ii) und (iii) äquivalent sind.

**5.2 Satz.** *Gegeben seien zwei zusammenhängende Teilkomplexe  $P_1, P_2$  eines endlichen CW-Komplexes  $P$ , sodass  $P = P_1 \cup P_2$  ist und die Inklusionen  $e_i: (P_i, P_0) \rightarrow (P, P_{3-i})$ ,  $i = 1, 2$ , Isomorphismen in der (Co-)Homologie induzieren, wobei  $P_0 := P_1 \cap P_2$  sei. Dann implizieren je zwei der folgenden Aussagen die verbleibende Dritte:*

- (a)  $P$  ist ein Poincaré-Komplex der formalen Dimension  $n$ .
- (b)  $(P_1, P_0)$  ist ein Poincaré-Paar der formalen Dimension  $n$ .
- (c)  $(P_2, P_0)$  ist ein Poincaré-Paar der formalen Dimension  $n$ .

*Beweis.* Mit dem 5-er-Lemma und (2.18) folgt, dass auch der letzte der senkrechten Homomorphismen im Diagramm von (2.18) ein Isomorphismus ist. Da  $P_1$  und  $P_2$  zusammenhängend sein sollen, ergibt sich, dass die jeweilige  $n$ -te Homologiegruppe isomorph zu  $\mathbb{Z}$  ist. □

**5.3 Satz.** *Sei  $P$  ein einfach zusammenhängender CW-Komplex der formalen Dimension  $n$ . Dann existiert ein CW-Komplex  $\bar{P}$ , sodass gilt:*

- (a)  $\bar{P}$  und  $P$  sind vom gleichen Homotopietyp.
- (b)  $\bar{P}$  enthält keine  $(n-1)$ -Zellen.
- (c)  $\bar{P}$  enthält genau eine  $n$ -Zelle.
- (d)  $\bar{P}$  enthält keine  $q$ -Zellen,  $q > n$ .

*Beweis.* Es gilt:

$$\begin{aligned} H_n(P) &\cong \mathbb{Z} \\ H_{n-1}(P) &\cong H^1(P) = 0 \\ H^2(P) &\cong \text{Hom}(H_2(P; \mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}(H_1(P); \mathbb{Z})) \cong \mathbb{Z}^{\beta_2} \end{aligned}$$

wobei  $\beta_2$  der Rang von  $H_2(P)$  sei.

Somit besitzen  $H_n(P), H_{n-1}(P), H_{n-2}(P) \cong H^2(P)$  keine Torsionskoeffizienten und wegen (2.24) existiert somit ein CW-Komplex  $\bar{P}$  ohne  $(n-1)$ -Zellen und genau einer  $n$ -Zelle, da der Rang von  $H_n(P) = 1$  und der von  $H_{n-1}(P) = 0$  ist. Außerdem besitzt  $\bar{P}$  keine Zellen der Dimension  $q > n$ , da  $H_n(P)$  keine Torsionskoeffizienten besitzt und  $H_q(P) \cong H^{n-q}(P) = 0 \quad \forall q > n$  ist. Mit (2.24) folgt weiterhin, dass  $\bar{P}$  und  $P$  vom gleichen Homotopietyp sind.  $\square$

**5.4 Korollar.** *Sei  $P$  ein einfach zusammenhängender CW-Komplex der formalen Dimension  $n$ . Dann existiert ein CW-Komplex der Dimension  $n' \leq n-2$  und eine Abbildung  $f: S^{n-1} \rightarrow X$ , sodass  $P$  und  $C_f := X \cup_f e^n$  vom gleichen Homotopietyp sind.*

*Beweis.* Die Aussage folgt sofort aus (5.3) und der Tatsache, dass das  $n$ -Gerüst eines CW-Komplexes aus seinem  $(n-1)$ -Gerüst durch Ankleben von  $n$ -Zellen entsteht.  $\square$

**5.5 Definition.** Sei  $(P, P')$  ein Poincaré-Paar der formalen Dimension  $n$ .

Eine Faserung  $p: \tilde{P} \rightarrow P$  mit Faser  $S^{k-1}$  heißt *Spivak-Faserung* zu  $(P, P')$ , falls ein  $\alpha \in \pi_{n+k}(P \cup_p C\tilde{P}, P' \cup_p C(p^{-1}(P')))$  existiert, sodass  $h(\alpha) \cap U = [P]$  ist, wobei  $h$  der Hurewicz-Homomorphismus und  $U$  das erzeugende Element von  $H^k(P \cup_p C\tilde{P}, \tilde{P})$  sei.

**5.6 Satz.** *Zu jedem einfach zusammenhängenden Poincaré-Paar  $(P, P')$  existiert ein bis auf stabile Faserhomotopieäquivalenz eindeutig definierte Spivak-Faserung.*

Den Beweis findet man in [3]. In [2] wird sogar gezeigt, dass zu jedem Poincaré-Paar, also nicht nur zu einfach zusammenhängenden, eine Spivak-Faserung existiert. Allerdings wird die Eindeutigkeit nicht gezeigt, sondern nur in der Einleitung erwähnt. Da ich mich im Folgenden nur mit einfach zusammenhängenden Poincaré-Paaren beschäftige, genügt mir die Aussage von (5.6).

**5.7 Satz.** *Seien  $(P, P'), (Q, Q')$  einfach zusammenhängende Poincaré-Paare mit Spivak-Faserungen  $p: \tilde{P} \rightarrow P$  bzw.  $q: \tilde{Q} \rightarrow Q$  und  $f: (P, P') \rightarrow (Q, Q')$  eine Homotopieäquivalenz. Dann sind  $p: \tilde{P} \rightarrow P$  und  $f^*q: f^*\tilde{Q} \rightarrow P$  stabil faserhomotopieäquivalent.*

*Beweis.* Sei  $f^-: (Q, Q') \rightarrow (P, P')$  das Homotopieinverse von  $f: (P, P') \rightarrow (Q, Q')$ . Laut Prop. 2.1 in [23] existieren Isomorphismen

$$\begin{aligned} \beta: \pi_{n+k}(Q \cup_q C\tilde{Q}, Q' \cup_q C\tilde{Q}') &\rightarrow \pi_{n+k}(P \cup_{f^*q} C(f^*\tilde{Q}), P' \cup_{f^*q} C(f^*\tilde{Q}')), \\ \beta': H^k(Q \cup_q C\tilde{Q}, \tilde{Q}) &\rightarrow H^k(P \cup_{f^*q} C(f^*\tilde{Q}), f^*\tilde{Q}), \end{aligned}$$

wobei  $\tilde{Q}' := q^{-1}(Q')$  sei.

Also gilt  $h(\beta(\alpha)) \cap \beta'(U) = f_*[Q] = [P]$ , d.h.  $f^*q: f^*\tilde{Q} \rightarrow P$  ist eine Spivak-Faserung zu  $(P, P')$ . Da wegen (5.6) eine Spivak-Faserung zu  $(P, P')$  aber bis auf stabile Faserhomotopieäquivalenz eindeutig bestimmt ist, gilt die Aussage des Satzes.  $\square$

**5.8 Satz.** Sei  $\nu: P \rightarrow B_H$  die klassifizierende Abbildung der Spivak-Faserung zu einem einfach zusammenhängenden Poincaré-Paar  $(P, P')$  der formalen Dimension  $n \geq 6$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) Es existiert eine Abbildung  $\hat{\nu}: P \rightarrow B_{PL}$ , sodass  $Bi'' \circ \hat{\nu}: P \rightarrow B_H$  und  $\nu: P \rightarrow B_H$  homotop sind.
- (ii) Es existiert eine PL-Mannigfaltigkeit  $M$ , sodass  $(M, \partial M)$  und  $(P, P')$  vom gleichen Homotopietyp sind.

Zu der Abbildung  $Bi'' \circ \hat{\nu}: P \rightarrow B_H$  sei auf die Ausführungen auf Seite 68 hingewiesen; ebenfalls wegen der im Folgenden auftretenden Abbildungen  $Bi: B_O \rightarrow B_H$  und  $Bi': B_O \rightarrow B_{PL}$ .

Den Beweis des Satzes findet man für  $P' = \emptyset$  in [14], allgemein in [5].

**5.9 Satz.** Sei  $\nu: P \rightarrow B_H$  die klassifizierende Abbildung der Spivak-Faserung zu einem einfach zusammenhängenden Poincaré-Paar  $(P, P')$  der formalen Dimension  $n$ . Dann gilt:

- (a) Für  $n \geq 6$  und  $P' \neq \emptyset$  sind folgende Aussagen äquivalent:
  - (i) Es existiert eine Abbildung  $\tilde{\nu}: P \rightarrow B_O$ , sodass  $Bi \circ \tilde{\nu}: P \rightarrow B_H$  und  $\nu: P \rightarrow B_H$  homotop sind.
  - (ii) Es existiert eine differenzierbare Mannigfaltigkeit  $M$  mit Rand, sodass  $(M, \partial M)$  und  $(P, P')$  vom gleichen Homotopietyp sind.
- (b) Für  $n \geq 5$  und  $P' = \emptyset$  gilt:  
Falls eine geschlossene, differenzierbare Mannigfaltigkeit  $M$  existiert, sodass  $M$  und  $P$  vom gleichen Homotopietyp sind, so existiert eine Abbildung  $\tilde{\nu}: P \rightarrow B_O$  mit  $Bi \circ \tilde{\nu} \simeq \nu: P \rightarrow B_H$

Den Beweis des Satzes findet man in [3]. Für ungerade  $n$  gilt in (5.9(b)) auch die Umkehrung der Aussage.

In [27] hat R.Stöcker ein Hindernis definiert. Es ermöglicht die Aussage, ob die Einschränkung der Spivak-Faserung zu einem einfach zusammenhängenden Poincaré-Komplex  $C_f = X \cup_f e^n$  auf  $X$  stabil faserhomotopieäquivalent zu einem differenzierbaren Vektorraumbündel über  $X$  ist. Im Folgenden werde ich mich nun damit beschäftigen, ob sich dieses Vektorraumbündel über  $C_f$  fortsetzen lässt, sodass die Fortsetzung und die Spivak-Faserung zu  $C_f$  stabil faserhomotopieäquivalent sind.

**5.10 Satz.** Sei  $C_f := X \cup_f e^n, n \geq 6$ , ein einfach zusammenhängender Poincaré-Komplex (entsprechend (5.4)) und  $\nu: C_f \rightarrow B_H$  die klassifizierende Abbildung der zugehörigen Spivak-Faserung. Falls eine Abbildung  $\hat{\sigma}: X \rightarrow B_{PL}$  existiert, sodass die Abbildungen  $Bi'' \circ \hat{\sigma}: X \rightarrow B_H$  und  $\nu|_X: X \rightarrow B_H$  homotop sind, so existiert eine Abbildung  $\hat{\nu}: C_f \rightarrow B_H$ , sodass gilt:

- (a)  $Bi'' \circ \hat{\nu} \simeq \nu: C_f \rightarrow B_H$
- (b)  $\nu|_X = \hat{\sigma}: X \rightarrow B_{PL}$

*Beweis.* Sei  $F: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (C_f, X)$  die charakteristische Abbildung der  $n$ -Zelle und  $D_0^n := \{z \in D^n \mid \|z\| < \frac{1}{2}\}$ . Dann ist  $X$  ein strenger Deformationsretrakt von  $C_f^0 := C_f -$

$F(D_0^n)$  und  $\partial C_f^0 := D_f^0 \cap F(\bar{D}_0^n) = S^{n-1}$ . Da die Inklusionen  $e_1: (F(\bar{D}_0^n), \partial C_f^0) \rightarrow (C_f, C_f^0)$  und  $e_2: (C_f^0, \partial C_f^0) \rightarrow (C_f, F(\bar{D}_0^n))$  Isomorphismen in der (Co-)Homologie induzieren und  $(F(\bar{D}_0^n), \partial C_f^0) \approx (D^n, S^{n-1})$  ein Poincaré-Paar der formalen Dimension  $n$  ist, gilt nach (5.2), dass  $(C_f^0, \partial C_f^0)$  ein Poincaré-Paar der formalen Dimension  $n$  ist.

Da  $(C_f^0, \partial C_f^0)$  der Abbildungszylinder bzgl.  $f: S^{n-1} \rightarrow X$  ist, existiert eine Retraktion  $r: (C_f^0, \partial C_f^0) \rightarrow (X, f(S^{n-1}))$  relativ  $X$ . Somit ist  $\hat{\sigma} \circ r: C_f^0 \rightarrow B_{PL}$  eine Abbildung mit  $\hat{\sigma} \circ r|_X = \hat{\sigma}: X \rightarrow B_{PL}$  und  $Bi'' \circ \hat{\sigma} \circ r \simeq \nu|_{C_f^0}: C_f^0 \rightarrow B_H$ .

Wegen (5.8) existiert also eine PL-Mannigfaltigkeit  $M$ , sodass  $(M, \partial M)$  und  $(C_f^0, \partial C_f^0)$  vom gleichen Homotopietyp sind. Insbesondere haben  $\partial M$  und  $S^{n-1}$  den gleichen Homotopietyp. Wegen des Theorem B in [21] sind  $\partial M$  und  $S^{n-1}$  dann homöomorph und wegen des Main Theorem in [29] sogar PL-homöomorph.

Indem man nun mit diesem PL-Homöomorphismus eine  $n$ -Zelle an  $M$  klebt, erhält man eine geschlossene PL-Mannigfaltigkeit  $P$  mit Teilmannigfaltigkeit  $M$ . Nach (5.8) existiert also eine Abbildung  $\hat{\nu}: C_f \rightarrow B_{PL}$  mit  $\hat{\nu}|_{C_f^0} = \hat{\sigma} \circ r: C_f^0 \rightarrow B_{PL}$  und  $Bi'' \circ \hat{\nu} \simeq \nu: C_f \rightarrow B_H$ . Wegen  $\hat{\sigma} \circ r|_X = \hat{\sigma}: X \rightarrow B_{PL}$  ist der Satz nun bewiesen.  $\square$

### 5.11 Korollar.

*Voraussetzungen:*

*Sei  $C_f = X \cup_f e^n, n \geq 6$ , ein einfach zusammenhängender Poincaré-Komplex (entsprechend (5.4)) und  $\nu: C_f \rightarrow B_H$  die klassifizierende Abbildung der zugehörigen Spivak-Faserung. Ferner sei eine Abbildung  $\sigma_0: X \rightarrow B_O$  gegeben, sodass  $Bi \circ \sigma_0: X \rightarrow B_H$  und  $\nu|_X: X \rightarrow B_H$  homotop sind.*

*Behauptung:*

*Unter den obigen Voraussetzungen existiert eine Abbildung  $\hat{\nu}_0: C_f \rightarrow B_{PL}$  mit  $Bi'' \circ \hat{\nu}_0 \simeq \nu: C_f \rightarrow B_H$  und  $Bi' \circ \nu_0 = \hat{\nu}_0|_X: X \rightarrow B_{PL}$*

*Beweis.* Durch Anwendung von (5.10) auf die Abbildung  $Bi \circ \sigma_0: X \rightarrow B_{PL}$  ergibt sich die Behauptung, denn es gilt:  $Bi'' \circ (Bi' \circ \sigma_0) = (Bi'' \circ Bi') \circ \sigma_0 = Bi \circ \sigma_0 \simeq \nu|_X: X \rightarrow B_H$ .  $\square$

**5.12 Satz.** *Seien die Voraussetzungen von (5.11) erfüllt und  $\hat{\nu}_0: C_f \rightarrow B_{PL}$  sei die somit existierende Abbildung. Sei  $p_0: \tilde{X} \rightarrow X$  die durch  $\hat{\nu}_0|_X: X \rightarrow B_{PL}$  aus  $Bi': B_O \rightarrow B_{PL}$  induzierte Faserung und  $S := \{[s] \in [X, \tilde{X}] \mid p_{0*}[s] = [id_X]\}$ . Dann gilt:*

(a)  *$S$  ist die Menge aller Homotopieklassen von Schnitten  $s: X \rightarrow \tilde{X}$ .*

(b) *Mit  $s_0: X \rightarrow \tilde{X}, x \rightarrow (x, \sigma_0(x))$ , gilt:*

*$S = \{[\tilde{\mu}' \circ (s_0 \times g) \circ d] \mid [g] \in [X, PL/O]\}$ , wobei  $\tilde{\mu}': \tilde{X} \times PL/O \rightarrow \tilde{X}$  die offensichtliche Operation von  $PL/O := \text{Kern}(Bi')$  auf  $\tilde{X}$  und  $d: X \rightarrow X \times X$  die Diagonalabbildung sei.*

*Beweis.*

(a) Sei  $s: X \rightarrow \tilde{X}$  ein Schnitt. Dann gilt:  $p_{0*}[s] = [p_0 \circ s] = [id_X]$ , d.h.  $[s] \in S$ .

Sei umgekehrt ein  $[s] \in [X, X]$  mit  $p_0[s] = [id_X]$  gegeben. Betrachte nun folgendes Diagramm:



$$\begin{array}{ccc}
& & \tilde{X} \\
& \nearrow s & \downarrow p_0 \\
X & \xrightarrow{id_X} & X
\end{array}$$

Da  $p_0: \tilde{X} \rightarrow X$  eine Faserung ist, existiert zu  $\phi: p_0 \circ s \simeq id_X: X \times I \rightarrow X$  eine Abbildung  $\Phi: X \times I \rightarrow \tilde{X}$  mit  $p_0 \circ \Phi = \phi: X \times I \rightarrow X$  und  $\Phi(x, 0) = s(x) \quad \forall x \in X$ . Für die Abbildung  $s': X \rightarrow \tilde{X}$ ,  $x \rightarrow \Phi(x, 1)$ , gilt dann:

$s': X \rightarrow \tilde{X}$  und  $s: X \rightarrow \tilde{X}$  sind homotop und

$$p_0 \circ s'(x) = p_0 \circ \Phi(x, 1) = id_X(x) = x,$$

d.h.  $s': X \rightarrow \tilde{X}$  ist ein Schnitt.

(b) (i) Sei  $[g] \in [X, PL/O]$  beliebig. Dann gilt:

$$p_0 \circ (\tilde{\mu}' \circ (s_0 \times g) \circ d)(x) = p_0 \circ \tilde{\mu}'((x, \sigma_0(x)), g(x)).$$

Da  $\tilde{\mu}': \tilde{X} \times PL/O \rightarrow \tilde{X}$  durch die Operation  $\tilde{\mu}': B_O \times PL/O \rightarrow B_O$  induziert wird, operiert  $\tilde{\mu}': \tilde{X} \times PL/O \rightarrow \tilde{X}$  nur auf der zweiten Koordinate von  $\tilde{X} \subset X \times B_O$ , d.h.:  $p_0 \circ \tilde{\mu}'((x, \sigma_0(x)), g(x)) = p_0((x, \tilde{\mu}'(\sigma_0(x), g(x)))) = x$ .

Also ist  $\tilde{\mu}' \circ (s_0 \times g) \circ d: X \rightarrow \tilde{X}$  ein Schnitt, d.h.  $[\tilde{\mu}' \circ (s_0 \times g) \circ d] \in S$ .

(ii) Sei  $G: g_0 \simeq g_1: X \times I \rightarrow PL/O$  eine Homotopie. Definiere eine Abbildung  $H: X \times I \rightarrow \tilde{X}$  durch  $(x, t) \rightarrow \tilde{\mu}'(s_0(x), G(x, t))$ , die mit  $\tilde{\mu}': \tilde{X} \times PL/O \rightarrow \tilde{X}$ ,  $s_0: X \rightarrow \tilde{X}$  und  $G: X \times I \rightarrow PL/O$  ebenfalls stetig ist. Ferner gilt:

$$H(x, 0) = \tilde{\mu}'(s_0(x), g_0(x)) = \tilde{\mu}' \circ (s_0 \times g_0) \circ d(x) \quad \forall x \in X,$$

$$H(x, 1) = \tilde{\mu}'(s_0(x), g_1(x)) = \tilde{\mu}' \circ (s_0 \times g_1) \circ d(x) \quad \forall x \in X,$$

d.h.  $[\tilde{\mu}' \circ (s_0 \times g_0) \circ d] = [\tilde{\mu}' \circ (s_0 \times g_1) \circ d]$ .

(iii) Sei  $s: X \rightarrow \tilde{X}$  ein Schnitt. Definiere eine Abbildung  $g: X \rightarrow PL/O$  durch  $x \rightarrow \tilde{\mu}'((pr_2 \circ s_0(x))^{-1}, (pr_2 \circ s(x)))$ , wobei  $\tilde{\mu}': PL/O \times PL/O \rightarrow PL/O$  die Multiplikationsabbildung sei. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}' \circ (s_0 \times g) \circ d(x) &= \tilde{\mu}'(s_0(x), g(x)) \\
&= \tilde{\mu}'((x, pr_2 \circ s_0(x)), g(x)) \\
&= \tilde{\mu}'((x, pr_2 \circ s_0(x)), \mu'((pr_2 \circ s_0(x))^{-1}, (pr_2 \circ s(x)))) \\
&= (x, pr_2 \circ s(x)) \\
&= s(x)
\end{aligned}$$

Also lässt sich jeder Schnitt  $s: X \rightarrow \tilde{X}$  in der Form  $\tilde{\mu}' \circ (s_0 \times g) \circ d: X \rightarrow \tilde{X}$  darstellen.

(iv) Sei  $s: X \rightarrow \tilde{X}$  ein Schnitt mit  $[s] = [s_0] \in [X, X]$ . Nach (iii) gilt  $s = \tilde{\mu}' \circ (s_0 \times g) \circ d: X \rightarrow \tilde{X}$  mit  $g: X \rightarrow PL/O$ ,  $x \rightarrow \tilde{\mu}'((pr_2 \circ s_0(x))^{-1}, (pr_2 \circ s(x)))$ .

Ferner existiert eine Homotopie  $H: X \times I \rightarrow X$  mit  $H(x, 0) = s_0(x)$  und  $H(x, 1) = s(x)$ ,  $x \in X$ .

Da  $G: X \times I \rightarrow PL/O$  mit  $\mu': PL/O \times PL/O \rightarrow PL/O$ ,  $pr_2: \tilde{X} \rightarrow PL/O$  und  $H: X \times I \rightarrow \tilde{X}$  ebenfalls stetig ist, gilt, dass  $[g] = 0 \in [X, PL/O]$  ist.

□

**5.13 Satz.** Seien die Voraussetzungen von (5.12) erfüllt und  $\hat{v}_0: C_f \rightarrow B_{PL}$  sei die somit existierende Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) Es existiert ein  $[g] \in [X, PL/O]$ , sodass  $f^\dagger(s_0) = [g \circ f]$  ist, wobei  $s_0: X \rightarrow \tilde{X}$  der durch  $x \rightarrow (x, \sigma_0(x))$  definierte Schnitt sei.

- (b) Es existiert eine Abbildung  $\tilde{\nu}: C_f \rightarrow B_O$ , sodass  $Bi' \circ \tilde{\nu}: C_f \rightarrow B_{PL}$  und  $\hat{\nu}_0: C_f \rightarrow B_{PL}$  homotop sind.

*Beweis.*

- (a)  $\Rightarrow$  (b) : Sei  $g^-: X \rightarrow PL/O$  ein Vertreter des inversen Elements von  $[g] \in [X, PL/O]$ , Wegen (5.12) ist die Abbildung  $\tilde{\mu}' \circ (s_0 \times g^-) \circ d: X \rightarrow \tilde{X}$  dann ein Schnitt. Definiere nun eine Abbildung  $\sigma: X \rightarrow B_O$  durch  $x \rightarrow pr_2 \circ \tilde{\mu}' \circ (s_0 \times g^-) \circ d(x)$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} (i) \quad Bi' \circ \sigma(x) &= Bi' \circ pr_2 \circ \tilde{\mu}' \circ (s_0 \times g^-) \circ d(x) \\ &= \hat{\nu}|X \circ p_0 \circ \tilde{\mu}' \circ (s_0 \times g^-) \circ d(x) \\ &= \hat{\nu}|X \circ id_X(x) \\ &= \hat{\nu}|X(x) \end{aligned}$$

- (ii) Definiere eine Abbildung  $H: (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \times I \rightarrow PL/O$  durch

$$(t_1, \dots, t_{n-1}, t) \rightarrow \begin{cases} \tilde{\mu}'(s_0 \circ f((1+t)t_1, t_2, \dots, t_{n-1}), g \circ f((1-t)t_1, t_2, \dots, t_{n-1})), & 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ \tilde{\mu}'(s_0 \circ f((1-t)t_1, t_2, \dots, t_{n-1}), g \circ f((1+t)t_1, t_2, \dots, t_{n-1})), & \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases}$$

Diese Abbildung ist offensichtlich stetig und es gilt:

$$\begin{aligned} H(t_1, \dots, t_{n-1}, 0) &= \tilde{\mu}'(s_0 \circ f((t_1, \dots, t_{n-1}), g \circ f(t_1, \dots, t_{n-1})) \\ &= \tilde{\mu}' \circ (s_0 \times g) \circ d \circ f(t_1, \dots, t_{n-1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(t_1, \dots, t_{n-1}, 1) &= \begin{cases} \tilde{\mu}'(s_0 \circ f((2t_1, t_2, \dots, t_{n-1}), g \circ f(0, t_2, \dots, t_{n-1})) \\ \tilde{\mu}'(s_0 \circ f((1, t_2, \dots, t_{n-1}), g \circ f(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_{n-1})) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \tilde{\mu}'(s_0 \circ f(2t_1, t_2, \dots, t_{n-1}), 1_{PL/O}) \\ \tilde{\mu}'(*, g \circ f(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_{n-1})) \end{cases} \\ &= \begin{cases} s_0 \circ f(2t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) & 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ i' \circ g \circ f(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_{n-1}) & \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

d.h.  $[\tilde{\mu}' \circ (s_0 \times g) \circ d \circ f] = [s_0 \circ f] + i'_*[g \circ f]$ . Da aber  $PL/O$  eine topologische Gruppe und  $S^{n-1}$  eine Suspension ist, gilt wegen (1.25), dass  $[\tilde{\mu}' \circ (s_0 \times g^-) \circ d \circ f]$  ???

$= [s_0 \circ f] - i'_*[g \circ f]$  ist. Somit gilt:

$$\begin{aligned} f^\dagger(\tilde{\mu}' \circ (s_0 \times g^-) \circ d) &= i'_*^{-1}([\tilde{\mu}' \circ (s_0 \times g^-) \circ d \circ f] - \partial[\overline{F}]) \\ &= i'_*^{-1}([s_0 \circ f] - i'_*([g \circ f] - \partial[F])) \\ &= f^\dagger(s_0) - [g \circ f] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Die Aussage (b) folgt nun mit (4.27).

- (b)  $\Rightarrow$  (a) : Sei  $\tilde{\nu}: C_f \rightarrow B_O$  eine Abbildung, sodass  $Bi' \circ \tilde{\nu}: C_f \rightarrow B_{PL}$  und  $\hat{\nu}: C_f \rightarrow B_{PL}$  homotop sind. Definiere eine Abbildung  $s: X \rightarrow \tilde{X}$  durch  $x \rightarrow (x, \tilde{\nu}(x))$ . Dann ist  $s: X \rightarrow \tilde{X}$  ein Schnitt, der sich zu dem Schnitt  $\bar{s}: C_f \rightarrow \tilde{C}_f, z \rightarrow (z, \nu(z))$ , fortsetzen lässt. Mit (4.27) gilt also  $f^\dagger(s) = 0$ . Wegen (5.12) gilt ferner, dass eine Abbildung  $g': X \rightarrow PL/O$  existiert, sodass  $s = \tilde{\mu}' \circ (s_0 \times g') \circ d: X \rightarrow \tilde{X}$  ist. Somit gilt (entsprechend dem 1. Teil des Beweises):  $0 = f^\dagger(s) = f^\dagger(s_0) + [g' \circ f]$ , d.h.  $f^\dagger(s_0) = -[g' \circ f] = [g'^- \circ f]$ .  $[g'^-] \in [X, PL/O]$  ist also das gesuchte Element.

□

**5.14 Satz.** Gegeben seien zwei Abbildungen  $\hat{\nu}_i: C_f \rightarrow B_{PL}, i=0, 1$ , sodass

$Bi'' \circ \hat{\nu}_0: C_f \rightarrow B_H$  und  $Bi'' \circ \hat{\nu}_1: C_f \rightarrow B_H$  homotop sind. Dann gilt:

Falls eine Abbildung  $\tilde{\nu}_0: C_f \rightarrow B_O$  existiert, sodass  $Bi' \circ \tilde{\nu}_0: C_f \rightarrow B_{PL}$  und

$\hat{\nu}_0: C_f \rightarrow B_{PL}$  homotop sind, so existiert auch eine Abbildung  $\tilde{\nu}_1: C_f \rightarrow B_O$ ,

sodass  $Bi' \circ \tilde{\nu}_1: C_f \rightarrow B_{PL}$  und  $\hat{\nu}_1: C_f \rightarrow B_{PL}$  homotop sind.

*Beweis.* Sei  $\tilde{\nu}_1: C_f \rightarrow B_O$  eine Abbildung, sodass  $Bi' \circ \tilde{\nu}_1: C_f \rightarrow B_{PL}$  und  $\hat{\nu}_1: C_f \rightarrow B_{PL}$  homotop sind. Wegen  $H/PL = (H/O)/(PL/O)$  ist

$$Bi'_*: \{[\bar{\mu} \circ (\tilde{\nu}_1 \times h) \circ d] \in [C_f, B_O] \mid [h] \in [H/PL]\} \rightarrow \{[\hat{\nu}] \in [C_f, B_{PL}] \mid Bi''_*[\hat{\nu}] = Bi''_*[\hat{\nu}_1]\}$$

bijektiv, wobei  $\bar{\mu}: B_O \times H/O \rightarrow B_O$  die offensichtliche Operation von  $H/O := \text{Kern}(Bi)$  auf  $B_O$  sei. Somit existiert eine Abbildung  $h': C_f \rightarrow H/PL$ , sodass  $Bi' \circ \bar{\mu} \circ (\tilde{\nu}_1 \times h') \circ d: C_f \rightarrow B_{PL}$  und  $\hat{\nu}_0: C_f \rightarrow B_{PL}$  homotop sind. Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Voraussetzung und somit ist die Aussage bewiesen.  $\square$

**5.15 Korollar.** *Seien die Voraussetzungen von (5.12) erfüllt und  $\hat{\nu}_0: C_f \rightarrow B_{PL}$  sei die somit existierende Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (a) *Es existiert ein  $[g] \in [X, PL/O]$ , sodass  $f^\dagger(s_0) = [g \circ f]$  ist, wobei  $s_0: X \rightarrow \tilde{X}$  der durch  $x \rightarrow (x, \sigma_0(x))$  definierte Schnitt sei.*
- (b) *Es existiert eine Abbildung  $\tilde{\nu}: C_f \rightarrow B_O$ , sodass  $Bi \circ \tilde{\nu}: C_f \rightarrow B_H$  und  $\nu: C_f \rightarrow B_H$  homotop sind.*

*Beweis.* Existiere ein  $[g] \in [X, PL/O]$ , sodass  $f^\dagger(s_0) = [g \circ f]$  ist. Nach (5.13) existiert dann eine Abbildung  $\tilde{\nu}: C_f \rightarrow B_O$ , sodass  $Bi'_*[\tilde{\nu}] = [\hat{\nu}_0]$  ist. Somit gilt  $Bi_*[\tilde{\nu}] = Bi''_* \circ Bi'_*[\tilde{\nu}] = Bi''_*[\hat{\nu}_0] = [\nu]$ . Falls aber kein  $[g] \in [X, PL/O]$  existiert, sodass  $f^\dagger(s_0) = [g \circ f]$  ist, so existiert nach (5.13) auch keine Abbildung  $\tilde{\nu}: C_f \rightarrow B_O$ , sodass  $Bi'_*[\tilde{\nu}] = [\hat{\nu}_0]$  ist. Wegen (5.14) existiert dann auch zu keiner anderen Abbildung  $\hat{\nu}: C_f \rightarrow B_{PL}$  mit  $Bi''_*[\hat{\nu}] = [\nu]$  eine Abbildung  $\tilde{\nu}': C_f \rightarrow B_O$ , sodass  $Bi'_*[\tilde{\nu}'] = [\hat{\nu}]$  ist. Also existiert keine Abbildung  $\tilde{\nu}: C_f \rightarrow B_{PL}$ , sodass  $Bi_*[\tilde{\nu}] = [\nu]$  ist.  $\square$

**5.16 Satz.** *Seien  $C_f := X \cup_f e^n$ ,  $f: S^{n-1} \rightarrow X$  und  $C_g := Y \cup_g e^n$ ,  $g: S^{n-1} \rightarrow Y$ ,  $n \geq 6$ , zwei einfach zusammenhängende Poincaré-Komplexe und  $h: X \rightarrow Y$  eine Homotopieäquivalenz.*

*$\sigma: Y \rightarrow B_O$  sei eine Abbildung mit  $Bi \circ \sigma \simeq \nu|_Y: Y \rightarrow B_H$ , wobei  $\nu: C_g \rightarrow B_H$  die klassifizierende Abbildung der zu  $C_g$  gehörenden Spivak-Faserung sei.*

*Ferner sei  $s: Y \rightarrow \tilde{Y}$  der durch  $y \rightarrow (y, \sigma(y))$  definierte Schnitt zu der durch die Abbildung  $\hat{\nu}|_Y: Y \rightarrow B_{PL}$  aus  $Bi': B_O \rightarrow B_{PL}$  induzierten Faserung  $p: \tilde{Y} \rightarrow Y$ , wobei  $\hat{\nu}: C_g \rightarrow B_{PL}$  die entsprechend (5.11) existierende Abbildung sei.*

*Dann gilt: (a) Die Abbildung  $s': X \rightarrow \tilde{X}$ ,  $x \rightarrow (x, s \circ h(x))$ , ist ein Schnitt zu der durch  $h: X \rightarrow Y$  aus  $p: \tilde{Y} \rightarrow Y$  induzierten Faserung  $p': \tilde{X} \rightarrow X$ .*

$$(b) f^\dagger(s') = g^\dagger(s).$$

*Beweis.*

- (a)  $s': X \rightarrow \tilde{X}$ ,  $x \rightarrow (x, s \circ h(x))$ , ist wegen  $X := \{(x, \tilde{y}) \in X \times \tilde{Y} \mid h(x) = p(\tilde{y})\}$  und  $p \circ s = id_Y: Y \rightarrow Y$  wohldefiniert. Die Stetigkeit von  $s': X \rightarrow \tilde{X}$  ist offensichtlich. Wegen  $p'(x, \tilde{y}) = x \forall (x, \tilde{y}) \in \tilde{X}$  ist  $s': X \rightarrow \tilde{X}$  ein Schnitt.

(b) Betrachte folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & \pi_{n-1}(PL/O) & & & \\
& & & \swarrow j_* & & \searrow j'_* & \\
\pi_n(\tilde{C}_g, \tilde{Y}) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(\tilde{Y}) & \xleftarrow{\tilde{h}_*} & \pi_{n-1}(\tilde{X}) & \xleftarrow{\partial} & \pi_n(\tilde{C}_f, \tilde{X}) \\
\cong \downarrow p_* & & p_* \updownarrow s_* & & p'_* \updownarrow s'_* & & \cong \downarrow p'_* \\
\pi_n(C_g, Y) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(Y) & \xleftarrow{h_*} & \pi_{n-1}(X) & \xleftarrow{\partial} & \pi_n(C_f, X)
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\text{Dann gilt } f^\dagger(s') &= j_*'^{-1}([s' \circ f] - \partial[\overline{F}]) \\
&= j_*'^{-1} \circ \tilde{h}_*([s' \circ f] - \partial[\overline{F}]) \\
&= j_*'^{-1}([\tilde{h} \circ s' \circ f] - \tilde{h}_* \circ \partial[\overline{F}]) \\
&= j_*'^{-1}([s \circ \tilde{h} \circ p' \circ s' \circ f] - \partial \circ \tilde{h}_*[\overline{F}]) \\
&= j_*'^{-1}([s \circ \tilde{h} \circ f] - \partial \circ \tilde{h}_*[\overline{F}])
\end{aligned}$$

Mit  $H_n(C_f, X) \cong \mathbb{Z} \cong H_n(C_g, Y)$  gilt wegen (1.35) und (2.19) auch  $\pi_n(C_f, X, x_0) \cong \mathbb{Z} \cong \pi_n(C_g, Y, y_0)$ . Seien  $[F]$  bzw.  $[G]$  die jeweiligen Erzeugenden. Da  $h_*: \pi_n(C_f, X, x_0) \rightarrow \pi_n(C_g, Y, y_0)$  und  $\tilde{h}_*: \pi_n(\tilde{C}_f, \tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_n(\tilde{C}_g, \tilde{Y}, \tilde{y}_0)$  Isomorphismen sind, gilt  $\tilde{h}_*([\overline{F}]) = [\overline{G}]$  und  $h([f]) = h_* \circ \partial[F] = \partial \circ h_*([F]) = \partial[G] = [g]$ .

Also erhält man:  $f^\dagger(s') = j_*'^{-1}([s \circ g] - \partial[\overline{G}]) = g^\dagger(s)$ .

□

Mit Hilfe der bisher gewonnenen Ergebnisse fällt es jetzt nicht mehr schwer, die nächste Aussage, das eigentliche Ergebnisse dieser Arbeit zu beweisen.

**5.17 Satz.** *Sei  $P$  ein einfach zusammenhängender Poincaré-Komplex der formalen Dimension  $n \geq 6$  und  $\nu: P \rightarrow B_H$  die klassifizierende Abbildung der zu  $P$  gehörigen Spivak-Faserung. Ferner existiere eine Abbildung  $\sigma: P^{n-1} \rightarrow B_O$ , sodass  $Bi \circ \sigma: P^{n-1} \rightarrow B_H$  und  $\nu|_{P^{n-1}}: P^{n-1} \rightarrow B_H$  homotop sind.*

*Dann existiert ein durch die Homologie von  $P$  vollständig bestimmtes Element  $o(P) \in \pi_{n-1}(PL/O)$  und eine durch die Homologie von  $P$  vollständig bestimmte Untergruppe  $U(P) \subset \pi_{n-1}(PL/O)$ , sodass folgende Aussagen äquivalent sind:*

- (a)  $o(P) \in U(P)$
- (b) *Es existiert eine Abbildung  $\tilde{\nu}: P \rightarrow B_O$ , sodass  $Bi \circ \tilde{\nu}: P \rightarrow B_H$  und  $\nu: P \rightarrow B_H$  homotop sind.*

*Beweis.*

- (i) Existenz: Wähle  $C_f := X \cup_f e^n \simeq P$  und  $o(P) := f^\dagger(s)$ ,  $U(P) := f^*[X, PL/O]$ .
- (ii) Eindeutigkeit: Sie wurde in (5.16) gezeigt.

□

Damit ist das wesentliche Ziel der Arbeit erreicht, nämlich ein Hindernis gegen die Glättung von Poincaré-Komplexen der formalen Dimension  $n \geq 6$  zu finden, falls sein  $(n-1)$ -Gerüst schon glatt ist.

Die üblicherweise nun folgende Diskussion des Hindernisses und die Anwendung auf Beispiele ist mir im Rahmen dieser Arbeit leider nicht mehr möglich, da mir das Hindernis komplizierter geriet als erwartet. Ich beschränke mich daher auf das folgende Ergebnis für zusammenhängende Summen von Poincaré-Komplexen.

**5.18 Definition.** Seien  $P \simeq X \cup_f e^n$  und  $Q \simeq Y \cup_g e^n$  einfach zusammenhängende Poincaré-Komplexe der formalen Dimension  $n$  und die Abbildung  $f+g: S^{n-1} \rightarrow X \vee Y$  ein Repräsentant des Elements  $i_*[f] + j_*[g] \in \pi_{n-1}(X \vee Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_{n-1}(X, x_0) \oplus \pi_{n-1}(Y, y_0) \oplus \pi_n(X \times Y, X \vee Y, (x_0, y_0))$ , wobei  $i: X \rightarrow X \vee Y$  und  $j: Y \rightarrow X \vee Y$  Inklusionen seien.

Dann heißt  $P\#Q := (X \vee Y) \cup_{f+g} e^n$  *zusammenhängende Summe* von  $P$  und  $Q$ .

Um zu zeigen, dass  $P\#Q$  durch obige Definition bis auf den Homotopietyp eindeutig bestimmt ist, werden die beiden folgenden Ergebnisse benötigt:

- (1)  $f_1 \simeq f_2: S^{n-1} \rightarrow X \Rightarrow X \cup_{f_1} e^n \simeq X \cup_{f_2} e^n$
- (2)  $X \cup_{f_1} e^n \simeq X \cup_{f_2} e^n \Leftrightarrow$  Es existiert eine Homotopieäquivalenz  $h: X_1 \rightarrow X_2$  mit  $h \circ f_1 \simeq f_2: S^{n-1} \rightarrow X_2$

Die Aussage (1) wird direkt bewiesen und der " $\Leftarrow$ "-Teil von (2) folgt leicht mit (1). Für den " $\Rightarrow$ "-Teil von (2) wählt man eine zelluläre Homotopieäquivalenz  $k: X_1 \cup_{f_1} e^n \rightarrow X_2 \cup_{f_2} e^n$  und setzt  $h := k|_{X_1}: X_1 \rightarrow X_2$ .  $h: X_1 \rightarrow X_2$  ist dann eine Homotopieäquivalenz, da sie eine schwache Homotopieäquivalenz ist. Ferner ergibt sich mit (1.35) und (2.19), dass  $h \circ f_1 \simeq f_2: S^{n-1} \rightarrow X_2$  ist.

Dass  $P\#Q$  bis auf den Homotopietyp eindeutig bestimmt ist, ergibt sich nun sofort, wenn man beachtet, dass  $X_1 \vee Y$  und  $X_2 \vee Y$  vom gleichen Homotopietyp sind, falls  $X_1$  und  $X_2$  es sind, und dass  $(h \circ f_1) + g \simeq f_2 + g: S^{n-1} \rightarrow X_2 \vee Y$  ist, falls  $h \circ f_1 \simeq f_2: S^{n-1} \rightarrow X_2$  ist.

**5.19 Satz.** *Seien  $P$  und  $Q$  einfach zusammenhängende Poincaré-Komplexe der formalen Dimension  $n$ . Dann ist auch ihre zusammenhängende Summe  $P\#Q$  ein Poincaré-Komplex der formalen Dimension  $n$ .*

*Beweis.* Da alle Abbildungen basispunkterhaltend sein sollen, ist  $P\#Q$  vom gleichen Homotopietyp wie der Raum, der entsteht, wenn man aus der  $n$ -Zelle von  $P = X \cup_f e^n$  bzw.  $Q = Y \cup_g e^n$  jeweils das Innere eines  $n$ -Balls entfernt und die entstehenden Räume  $\bar{P}$  bzw.  $\bar{Q}$  an ihren Rändern verklebt. Mit  $R := \bar{P} \cap \bar{Q}$  gilt dann offensichtlich, dass  $(\bar{P}, R)$  und  $(\bar{Q}, R)$  Poincaré-Paare der formalen Dimension  $n$  sind (siehe den Beweis von (5.10)). Die Aussage des Satzes folgt nun mit (5.2).  $\square$

**5.20 Satz.** *Seien  $P_1$  und  $P_2$  einfach zusammenhängende Poincaré-Komplexe der formalen Dimension  $n$  und  $\nu_i: P_i \rightarrow B_H, i = 1, 2$ , seien die klassifizierenden Abbildungen der zu  $P_i$  gehörigen Spivak-Faserungen. Mit der kanonischen Abbildung  $k: P_1\#P_2 \rightarrow P_1 \vee P_2$  ist dann  $(\nu_1 \vee \nu_2) \circ k: P_1\#P_2 \rightarrow B_H$  die klassifizierende Abbildung der zu  $P_1\#P_2$  gehörigen Spivak-Faserung.*

**5.21 Satz.** *Seien die Voraussetzungen von (5.17) für die beiden einfach zusammenhängenden Poincaré-Komplexe  $P, Q$  der formalen Dimension  $n \geq 6$  erfüllt. Dann gilt:*

- (a)  $o(P\#Q) = o(P) + o(Q)$   
(b)  $U(P\#Q) = U(P) \oplus U(Q)$

*Beweis.*

- (a) Sei  $o(P) := i'^{-1}([r \circ f] - \partial[\overline{F}])$   
und  $o(Q) := j'^{-1}([s \circ g] - \partial[\overline{G}])$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} o(P) + o(Q) &= i'^{-1}([r \circ f] - \partial[\overline{F}]) + j'^{-1}([s \circ g] - \partial[\overline{G}]) \\ &= (i'^{-1}, j'^{-1})([r \circ f] + [s \circ g] - (\partial[\overline{F}] + \partial[\overline{G}])) \\ &= (i' \vee j')_*^{-1}([(r \vee s) \circ (f + g)] - \partial[\overline{F + G}]) \\ &= o(P\#Q) \end{aligned}$$

- (b) Sei ein  $[h] \in U(P\#Q)$  gegeben. Dann existiert nach Definition ein  $[k] \in [X \vee Y, PL/O]$ , sodass gilt:

$$\begin{aligned} [h] &= [k \circ (f + g)] \\ &= [(k|X, k|Y) \circ (f + g)] \\ &= [(k|X \circ f) + (k|Y \circ g)] \\ &= [k|X \circ f] + [k|Y \circ g] \\ &\in U(P) \oplus U(Q) \end{aligned}$$

Seien nun umgekehrt  $[h_1] \in U(P)$  und  $[h_2] \in U(Q)$  gegeben. Dann gilt  $[h_1] = [k_1 \circ f]$  und  $[h_2] = [k_2 \circ g]$ . Somit folgt:

$$\begin{aligned} [h_1] + [h_2] &= [k_1 \circ f] + [k_2 \circ g] \\ &= [(k_1 \circ f) + (k_2 \circ g)] \\ &= [(k_1, k_2) \circ (f + g)] \\ &\in U(P\#Q) \end{aligned}$$

□

**5.22 Korollar.** *Seien die Voraussetzungen von (5.17) für die beiden einfach zusammenhängenden Poincaré-Komplexe  $P, Q$  der formalen Dimension  $n \geq 6$  erfüllt. Dann gilt:*

$$o(P\#Q) \in U(P\#Q) \Leftrightarrow o(P) \in U(P) \text{ und } o(Q) \in U(Q)$$

## Literatur

- [1] BAUES, H. J.: Obstruction theory on homotopy classification of maps. In: *Lecture Notes in Math.* 628 (1977)
- [2] BROWDER, W. : Surgery on the theory of differentiable transformation groups. In: *Proc. of the Conference on Transformation Groups* (1967), S. 1–46
- [3] BROWDER, W. : Poincaré spaces, their normal fibrations and surgery. In: *Invent. Math.* 17 (1972), S. 191–202
- [4] BROWDER, W. : Surgery on simply-connected manifolds. In: *Ergebn. der Mathematik und ihrer Grenzgebiete* 65 (1972)
- [5] BROWDER, W. ; HIRSCH, M. W.: Surgery on piecewise linear manifolds and applications. In: *Bull. A.M.S.* 72 (1966), S. 959–964
- [6] DOLD, A. : Partitions of unity in the theory of fibrations. In: *Ann. of Math. (2)* 78 (1963), S. 223–255
- [7] DOLD, A. ; LASHOF, R. K.: Principal quasifibrations and fibre homotopy equivalence of bundles. In: *Ill. J. of Math. (2)* 1959 (1958), S. 285–305
- [8] DOLD, A. ; THOM, R. : Quasifaserungen und unendliche symmetrische Produkte. In: *Ann. of Math. (2)* 67 (1958), S. 239–281
- [9] HUSEMOLLER, D. : Fibre bundles. In: *Graduate Texts in Math.* 20 (1975)
- [10] KATO, M. : Combinatorial prebundles I. In: *Osaka J. of Math.* 4 (1967), S. 2989–303
- [11] KUIPER, N. H. ; LASHOF, R. K.: Microbundles and bundles I. In: *Invent. Math.* 1 (1966), S. 1–17
- [12] KUIPER, N. H. ; LASHOF, R. K.: Microbundles and bundles II. In: *Invent. Math.* 1 (1966), S. 243–259
- [13] LASHOF, R. K. ; ROTHENBERG, M. : Microbundles and smoothing. In: *Topology* 3 (1964/65), S. 357–388
- [14] MADSON, I. ; MILGRAM, R. J.: Spaces for surgery and cobordism of manifolds. In: *Ann. of Math Studies* 92 (1979)
- [15] MASSEY, W. S.: Singular homology theory. In: *Graduate Texts in Mat.* 70 (1980)
- [16] MILGRAM, R. J.: The bar construction and abelian H-spaces. In: *Ill. J. of Math.* 11 (1967), S. 242–250
- [17] MILNOR, J. W.: The geometric realization of a semi-simplicial complex. In: *Ann. of Math. (2)* 65 (1957), S. 357–362
- [18] MILNOR, J. W.: Microbundles I. In: *Topology, Suppl. 1* 3 (1964/65), S. 53–80
- [19] MILNOR, J. W. ; STASFEFF, J. D.: Characteristic classes. In: *Ann. of Math. Studies* 76 (1974)

- [20] SCHÖN, R. : Fibrations over a CW-base. In: *Proc. A.M.S.* 1977 (1977), S. 165–166
- [21] SMALE, S. : Generalized Poincaré’s conjecture in dimensions greater than four. In: *Ann. of Math. (2)* 74 (1961), S. 391–406
- [22] SPANIER, E. H.: *Algebraic topology*. McGra-Hill, 1976
- [23] SPIVAK, M. : Spaces satisfying Poincaré duality. In: *Topology* 6 (1967), S. 77–101
- [24] STASHEFF, J. D.: A classification theorem for fibre spaces. In: *Topology* 2 (1963), S. 77–101
- [25] STASHEFF, J. D.: Associated fibre spaces. In: *Mich. Math. J.* 15 (1968), S. 457–470
- [26] STEENROD, N. E.: Milgram’s classifying space of a topological group. In: *Topology* 7 (1968), S. 349–368
- [27] STÖCKER, R. : *Thom complexes, Hopf invariants and Poincaré duality spaces*. – unveröffentlicht
- [28] STÖCKER, R. ; ZIESCHANG, H. : *Algebraische Topologie*. RUB, 1975
- [29] SULLIVAN, D. : On the Hauptvermutung for manifolds. In: *Bull. A.M.S.* 73 (1967), S. 598–600
- [30] SWITZER, R. M.: *Algebraic topology - homotopy and homology*. Springer-Verlag, 1975 (Die Grundlehren d. math. Wissenschaften 212)
- [31] WALL, C. T. C.: Finiteness conditions for CW-complexes. In: *Ann. of Math. (2)* 81 (1965), S. 56–69
- [32] WALL, C. T. C.: Homeomorphism and diffeomorphism classification of manifolds. In: *Intern. Congr. of Math.* (1966), S. 450–460
- [33] WALL, C. T. C.: Poincaré complexes I. In: *Ann. of Math. (2)* 86 (1967), S. 213–245
- [34] WALL, C. T. C.: *Surgery on compact manifolds*. Academic Press London, 1970
- [35] WHITEHEAD, G. W.: Elements in homotopy theory. In: *Graduate Texts in Math.* 61 (1978)